

Algebraische Graphentheorie

Knoten-Partitionen und das Spektrum

23. November 2007

Leitung Dr. Ivan Veselic

Vortragender Lars A. Wallenborn

Definition 8.1. Für einen Graphen Γ und eine natürliche Zahl l heißt $V_1 \dots V_l$ Farbpartition von Γ wenn $V(\Gamma) = V_1 \cup \dots \cup V_l$ und $\langle V_i \rangle_\Gamma$ leer. Das minimale $l =: \nu(\Gamma)$ heißt chromatische Zahl, die V_i heißen Farb-Klassen.

Lemma 8.2. Sei Γ ein bipartiter Graph und λ Eigenwert dann gilt:

$-\lambda$ ist Eigenwert mit gleicher Vielfachheit

Definition 8.2a. Für einen Graphen Γ ist

$k_{min}(\Gamma)$ der minimale Knotengrad

$k_{ave}(\Gamma)$ der durchschnittliche Knotengrad

$k_{max}(\Gamma)$ der maximale Knotengrad

Lemma 8.3. Sei Γ ein Graph, dann gilt:

1. Für jeden Subgraphen $\Lambda \subset \Gamma$ gilt:

$$\lambda_{max}(\Lambda) \leq \lambda_{max}(\Gamma) \text{ und } \lambda_{min}(\Lambda) \geq \lambda_{min}(\Gamma)$$

2. Für Γ gilt:

$$k_{max}(\Gamma) \geq \lambda_{max}(\Gamma) \geq k_{ave}(\Gamma) \geq k_{min}(\Gamma)$$

Definition 8.3a. Ein Graph Γ heißt l -kritisch, wenn $\nu(\Gamma) = l$ und für jeden Subgraphen $\Lambda \neq \Gamma$ gilt $\nu(\Lambda) < l$.

Lemma 8.4. Sei Γ ein Graph mit $\nu(\Gamma) \geq 2$ dann gilt:

gibt es einen l -kritischer Subgraph $\Lambda \subset \Gamma$ s.d. $\forall v \in V(\Gamma)$ gilt: $\text{grad}_\Lambda(v) \geq l - 1$

Satz 8.5 (Wilf 1967). Sei Γ ein Graph, dann gilt:

$$\nu(\Gamma) \leq 1 + \lambda_{max}(\Gamma)$$

Lemma 8.6. Sei $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ partitioniert in $X = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix}$, wobei P und R symmetrische, quadratische Matrizen sind. Dann gilt:

$$\lambda_{\max}(X) + \lambda_{\min}(X) \leq \lambda_{\max}(P) + \lambda_{\max}(R)$$

Korollar 8.7. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch in t^2 Partitionen A_{ij} unterteilt s.d. A_{ii} quadratisch ist, dann gilt:

$$\lambda_{\max}(A) + (t-1)\lambda_{\min}(A) \leq \sum_{i=1}^t \lambda_{\max}(A_{ii})$$

Satz 8.8 (Hoffmann 1970). Für einen Graphen Γ mit mind. einer Kante gilt:

$$\nu(\Gamma) \geq 1 - \frac{\lambda_{\max}(\Gamma)}{\lambda_{\min}(\Gamma)}$$

Korollar 8.8a. Sei Γ ein planarer und zusammenhängender Graph, dann gilt:

$$\lambda_{\min}(\Gamma) \leq -\frac{1}{3}\lambda_{\max}(\Gamma)$$