Seminar zur Globale Analysis
Ausgewählte Probleme der Hodge-Theorie
Distributionen und Ströme

Lars A. Wallenborn
www.klausuren-skripte-protokolle.de

3. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

0 Erinnerung

a) $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$ ist ein Multiindex mit $|\alpha| = \sum_{i=0}^k \alpha_i$ und $dx_\alpha = dx_{\alpha_1} \wedge \ldots dx_{\alpha_k}$.

b) $d : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ ist die äußere Ableitung von k-Formen also für $\omega = f_\alpha dx_\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ ist

$$d\omega = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_\alpha$$

c) Der Hodge-Operator $*$ ist definiert durch

$$\psi \wedge *\phi =< \psi, \phi > \cdot dV$$

wobei $< \cdot, \cdot >$ im Folgenden immer das Standart-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ ist und dV das Volumenelement.

d) Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ kompakt mit glattem Rand und ω stetig diffbare $(n-1)$-Form, dann gilt der Satz von Stockes:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega$$

e) $\mathbb{R}^n$ sei immer durch $dx = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ orientiert, $\mathbb{C}^n$ immer durch $dz \wedge \overline{dz} = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge \overline{dz_1} \wedge \ldots \wedge \overline{dz_n}$.

Proposition 0.1. *Es gilt*

a) die Leibniz-Formel für $\psi \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ und $\phi \in \Lambda^{n-k-1}(\mathbb{R}^n)$:

$$d(\psi \wedge \phi) = d\psi \wedge \phi + (-1)^k \psi \wedge d\phi$$

b) $\psi \wedge *\phi = \pm * \psi \wedge \phi$

c) Für $\{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k}\} \subset \{1, \ldots, n\}$ ist

$$*(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = sgn(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots j_{n-k}) \cdot dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{n-k}}$$

d) $*(dx_i) = (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$

e) Wenn es $j \neq l \in \mathbb{N}$ gibt mit $\alpha_j = \alpha_l$ dann ist $dx_\alpha = 0$.

1 Distributionen, Ströme und Residualformeln

Definition 1.1. *a) Der Raum der Distributionen ist definiert als*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := \{T : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} | T \textit{ ist linear und stetig}\}$$

b) Die zu einer Funktion $\psi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ assoziierte Distribution ist punktweise definiert über

$$T_\psi(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\psi(x)dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

c) Die Delta-Distribution im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\delta_{\{x\}}(\phi) := \phi(x) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

d) Auch die Ableitung einer Distribution $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist punktweise definiert:

$$(D_i T)_{(\phi)} := -T(D_i \phi) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Bemerkung 1.2. *Für eine Distribution $T = T_\psi$ mit $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ist diese Definition sinnvoll. Denn sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ beliebig:*

$$\begin{aligned} (D_i T_\psi)_{(\phi)} &= -T_\psi(D_i\phi) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) D_i\phi(x)dx \\ &= \int D_i\psi(x)\phi(x)dx \\ &= T_{D_i\phi}(\phi) \end{aligned}$$

Also als Gleichung von Distributionen: $D_i T_\psi = T_{D_i\psi}$.

Definition 1.3. *Für $\psi \in C(\mathbb{R}^n)$ ist das Residuum definiert als:*

$$R(\psi) := DT_\psi - T_{D\psi}$$

Beispiel 1.4. *Betrachte*

$$\psi := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Dann gilt für die assoziierte Distribution mit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ beliebig:

$$\begin{aligned} (DT_\psi)_{(\phi)} &= -\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\phi'(x)dx \\ &= -\int_0^\infty \phi'(x)dx \\ &= -[\phi(x)]_0^\infty = \phi(0) \end{aligned}$$

Also als Gleichung von Distributionen: $DT_\psi = \delta_{\{0\}}$. *Ausserdem gilt formal, also unter Ignorieren der Singularität:* $D\psi = \psi'(x) = 0$ *und zusammen:*

$$R(\psi) = DT_\psi - T_{D\psi} = \delta_{\{0\}} - 0 = \delta_{\{0\}}$$

Definition 1.5. *a) Sei* $\Lambda_0^k(\mathbb{R}^n)$ *der Raum der glatten k-Formen mit kompaktem Träger.*

b) Der Raum der Ströme vom Grad q ist als Dualraum definiert:

$$\mathcal{D}^q(\mathbb{R}^n) := \left(\Lambda_0^{n-q}(\mathbb{R}^n)\right)^*$$

c) Der zu einer q-Form $\psi \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) := \left\{\sum_{|\alpha|=q} \psi_\alpha dx_\alpha | \psi_\alpha \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)\right\}$ *assoziierte Strom* $T_\psi \in \mathcal{D}^q(\mathbb{R}^n)$ *ist punktweise definiert als:*

$$T_\psi(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} \psi \wedge \phi \quad \forall \phi \in \Lambda_0^{n-q}(\mathbb{R}^n)$$

d) Sei Γ *eine stückweise glatte orientierte* $(n-q)$*-Kette in* $\mathbb{R}^n$*, dann ist durch* $T_\Gamma \in \mathcal{D}^q(\mathbb{R}^n)$ *ein Strom punktweise definiert durch:*

$$T_\Gamma(\phi) = \int_\Gamma \phi \quad \forall \phi \in \Lambda_0^{n-q}(\mathbb{R}^n)$$

e) Die *<u>Äußere Ableitung von Strömen</u>* *wird von der Äußeren Ableitung von Formen induziert:*

$$\begin{array}{rcl} d : \mathcal{D}^q(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{D}^{q+1}(\mathbb{R}^n) \\ T & \mapsto & dT \end{array}$$

wobei für $\phi \in \Lambda_0^{n-q-1}(\mathbb{R}^n)$ *gelte:* $(dT)_{(\phi)} = (-1)^{q+1} T(d\phi)$.
Es gilt dann $d^2 = 0$*, da*

$$(ddT)_{(\phi)} = (-1)^{q+1}(dT)(d\phi) = (-1)^{q+1+q} T(d^2\phi) = (-1)^{2q+1} T(0) = 0$$

<u>Anmerkung:</u> Für einen von einer Form $\psi \in \Lambda^q(\mathbb{R}^n)$ *erzeugten Strom* T_ψ *gilt mit* $\phi \in \Lambda^{n-q-1}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} dT_\psi(\phi) &= (-1)^{q+1} T(d\phi) \\ &= (-1)^{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} \psi \wedge d\phi \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} d(\psi \wedge \phi) + \int_{\mathbb{R}^n} d\psi \wedge \phi \\ &= T_{d\psi}(\phi) \end{aligned}$$

Die äußere Ableitung auf Strömen induziert also wieder die äußere Ableitung auf Formen.

f) Sei $\psi \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $s \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n - S)$, weiter setze sich $d\psi$ auf $\mathbb{R}^n - S$ zu einer lokalen L^1-Form auf $\mathbb{R}^n$ fort. Dann ist das Residuum von Strömen über die folgende Gleichung von Strömen definiert:

$$R(\psi) := dT_\psi - T_{d\psi}$$

Beispiel 1.6. *Sei*

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z}$$

der Cauchy-Kern auf $\mathbb{C}$. Es gilt $d\kappa = \overline{\partial}\kappa = 0$ und damit ist $R(\kappa) = dT_\kappa = \overline{\partial}T_\kappa$. Ausserdem gilt:

$$(\overline{\partial}T_\kappa)_{(\phi)} = (T_\kappa)_{(\overline{\partial}\phi)} = \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\phi}{\partial\overline{z}}(z)\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\phi}{\partial\overline{z}}\frac{1}{z}dz = \phi(0)$$

also $(\overline{\partial}T_\kappa)_{(\phi)} = \phi(0)$ und somit als Gleichung von Strömen

$$\overline{\partial}T_\kappa = \delta_{\{0\}}$$

Das Residuum ergibt sich dann zu

$$R\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z}\right) = \overline{\partial}T_\kappa = \delta_{\{0\}}$$

Wir wollen nun auch auf $\mathbb{R}^n$und $\mathbb{C}^n$möglist interessante glatte Formen finden, die der Delta-Distribution enstprechen. Dazu führen wir folgende Notation ein:

$$\begin{aligned} r^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 = ||x||^2 \\ rdr &= \sum_{i=1}^n x_i dx_i \\ \Phi(x) &= dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\ \Phi_i(x) &= (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \end{aligned}$$

Proposition 1.7. *Es gilt:*

a) $*(rdr) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x)$

b) $d\phi_i(x) = \phi(x)$

c) $d(*rdr) = n\Phi(x)$

Definition 1.8. *Für ein (erstmal beliebiges, aber nur von n abhängendes) $C_n \in \mathbb{R}$ sei:*

$$\sigma = C_n \frac{\sum_{i=1}^n \Phi_i(x)}{||x||^n} \overset{1.7a}{=} C_n \frac{*(rdr)}{r^n}$$

Satz 1.9. *Es gilt*

$$d\sigma = 0$$

damit ist

$$\int_{\partial B_R(0)} \sigma$$

unabhängig von R und endlich.

Bemerkung 1.10. *a) Durch geeignete Wahl von C_n lässt sich σ normieren:*

$$\int_{\partial B_R(0)} \sigma = 1 \quad \forall \mathbb{R} > 0$$

b) σ ist invariant unter Rotationen

c) σ ist senkrecht zur Normalen dr an der Sphäre

Satz 1.11. *Es gilt*

$$dT_\sigma = \delta_{\{0\}}$$

und für das Residuum

$$R(\sigma) = \delta_{\{0\}}$$

Proposition 1.12. *Es gilt:*

a) $*(\overline{dz_i}) = (-1)^{i-1} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge \overline{dz_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{\overline{dz_i}} \wedge \ldots \wedge \overline{dz_n}$

b) $*(r\overline{\partial}r) = \sum_{i=1}^n \overline{\Phi_i(z)} \wedge \Phi(z)$

Definition 1.13. *Für $C^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ betrachten wir die $(n, n-1)$-Form*

$$\beta = C_n \frac{\sum_{i=1}^n \overline{\Phi_i(z)} \wedge \Phi(z)}{||z||^{2n}} \overset{1.12b}{=} C_n \frac{*(r\overline{\partial}r)}{r^{2n}}$$

Dann ist $\beta \in L^{n,n-1}$ und eine ähnliche Rechnung wie eben liefert

$$\overline{\partial}\beta = 0 \quad \text{ auf } \mathbb{C}^n - \{0\}$$

und wieder die gleiche Argumentation wie eben liefert

$$\overline{\partial}T_\beta = \delta_{\{0\}}$$

und somit

$$R(\beta) = \delta_{\{0\}}$$

2 Glättung von Distributionen und Strömen

Definition 2.1. *Sei* $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *mit*

a) $\chi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

b) $\exists U \subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* $0 \in U$ *und* $supp(\chi) \subset U$

c) $\int_{\mathbb{R}^n} \chi(x)dx = 1$

d) $\chi(x)$ *ist radialsymmetrisch, also* $\chi(x) = \chi(r)$

Sei weiter $\chi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\chi(\frac{x}{\epsilon})$

Bemerkung 2.2. *Es gilt* $supp(\chi_\epsilon) = \epsilon supp(\chi)$ *und wegen des Transformationssatzes*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_\epsilon(x)dx = 1$$

Proposition 2.3. *Es gilt*

$$T_{\chi_\epsilon} \to \delta_{\{0\}} \text{ für } \epsilon \to 0$$

damit ist gemeint:

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \lim_{\epsilon \to 0} T_{\chi_\epsilon}(\phi) = \phi(0)$$

Die Distribution T_{χ_ϵ} *approximiert also glatt die* δ*-Distribution.*

Definition 2.4. *Für* $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *sei*

$$T_\epsilon(x) := T_y(\chi_\epsilon(x-y))$$

wobei T_y *die Funktion* χ_ϵ *als Funktion von* y *auffast.*

Bemerkung 2.5. *Es gilt* $T_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *mit Ableitungen:*

$$D^\alpha T_\epsilon(x) = (-1)^{|\alpha|} T_y(D_x^\alpha(\chi_\epsilon(x-y))$$

Im Folgenden wird als Verkürzende Schreibweise je nach Zusammenhang mit T_ϵ *sowohl die Funktion in Abhängigkeit von der Variablen* x *als auch die von dieser Funktion erzeugte Distribution* $T_{T_{\chi_\epsilon}}$ *gemeint sein. Für* $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *ist dann*

$$\phi_\epsilon(y) = (T_\phi)_x\left(\chi(x-y)\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\chi_\epsilon(x-y)dx$$

Satz 2.6. *Es gilt:*

a) $(T_\phi)_\epsilon = T_{\phi_\epsilon} \quad \forall \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

b) $T_\epsilon(\psi) = T(\psi_\epsilon) \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

c) $(D^\alpha T)_\epsilon = D^\alpha(T_\epsilon)$

Korrolar 2.7. *Für* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*:*

$$D\phi_\epsilon \to D\phi$$

und

$$T_\epsilon(\phi) \to T(\phi)$$

für $\epsilon \to 0$.

3 Harmonische Distributionen

Definition 3.1. *a) Der Laplace-Operator ist definiert als:*

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

b) Eine Funktion, eine Distribution oder ein Strom T *heißt* *harmonisch**, wenn gilt:*

$$\Delta T = 0$$

Lemma 3.2. *Für jedes harmonische* $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *gibt es ein harmonisches* $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *mit* $T = T_\phi$.