# Konvergenzkriterien für Reihen

Mathematik für Physiker I

Wintersemester 2007/2008

**Satz 1.** *„Trivial-Kriterium“ Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und keine Nullfolge, dann divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Bemerkung: Also ist es für die Konvergenz der Reihe notwendig, dass die zugrundeliegende Folge eine Nullfolge ist.*

**Satz 2.** *Leibniz-Kriterium Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge reeller Zahlen, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$.*

**Satz 3.** *Cauchy-Kriterium Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m > n > N$ gilt: $|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$. Bemerkung: Diese Kriterium ist mehr von theoretischem Interesse denn als wirklich „praktisches“ Kriterium von Nutzen.*

**Satz 4.** *Majoranten-Kriterium Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine nicht-negative Folge reeller Zahlen, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sei konvergent und es gelte für „fast alle“ $n \in \mathbb{N}$ (d.h. für alle bis auf endlich viele Ausnahmen): $|a_k| \leq b_k$, dann ist auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.*

**Satz 5.** *Minoranten-Kriterium Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht-negative Folgen reeler Zahlen, es gelte für „fast alle“ $k \in \mathbb{N}$ (d.h. für alle bis auf endlich viele Ausnahmen): $a_k \geq b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sei divergent, dann ist auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.*

**Satz 6.** *Wurzelkriterium Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wenn einer der folgenden Bedingungen gilt:*

- $\exists C < 1$ *mit* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq C$
- $\exists C < 1$ *mit* $\sqrt[k]{|a_k|} \leq C$ *Für „fast alle“ $k \in \mathbb{N}$ (d.h. für alle bis auf endlich viele Ausnahmen)*
- $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$

*Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (absolut). Bemerkung: Für den Fall, dass der oben genannten* $\limsup$ *größer 1 ist divergiert die Reihe. Im Falle der Gleichheit mit 1 ist keine Aussage durch dieses Kriterium möglich.*

**Satz 7.** *Quotientenkriterium Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge komplexer Zahlen (ohne 0) und es gilt eine der folgenden Bedingungen:*

- $\exists q < 1$ *mit* $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$
- $\exists q < 1$ *mit* $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ *Für „fast alle“* $k \in \mathbb{N}$ *(d.h. für alle bis auf endlich viele Ausnahmen)*
- $\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$

*Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*. Bemerkung: Für den Fall, dass der oben genannten* lim sup *größer oder gleich 1 ist gilt divergiert die Reihe.*

**Satz 8.** *Cauchy-Verdichtungs-Kriterium Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Folge positiver reeler Zahlen. Dann gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergiert}$$

**Satz 9.** *Integral-Kriterium Sei* $f : [p, \infty) \to [0, \infty)$ *mit* $p \in \mathbb{Z}$ *eine monoton fallende Funktion. Dann gilt:*

$$\sum_{k=p}^{\infty} f(k) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_p^{\infty} f(x)dx \text{ existiert (d.h. einen endlichen Wert annimmt).}$$