

Aufgaben zur Selbstdiagnose

Mathematik für Physiker I

Wintersemester 2007/2008

Aufgabe 1. Allgemeine Fragen

- Negiere: „Alle an diesem Test teilnehmende Studenten finden ihn blöd“
- Definiere injektiv, surjektiv und bijektiv (für Abbildungen)
- Wie viele Elemente hat ein kleinster Körper? Gib ein Beispiel an.
- Definiere „Norm“ und „Skalarprodukt“
- Zeichne für $p = 1, 2, \infty$ den Einheitskreis $S_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \|x\|_p = 1\}$.
- Wo ist der Fehler in folgender Rechnung?

$$\begin{aligned} a + b &= c \\ \Leftrightarrow (4 - 3)a + (4 - 3)b &= (4 - 3)c \\ \Leftrightarrow 4a - 3a + 4b - 3b &= 4c - 3c \\ \Leftrightarrow 4a + 4b - 4c &= 3a + 3b - 3c \\ \Leftrightarrow 4(a + b - c) &= 3(a + b - c) \\ \Leftrightarrow 4 &= 3 \end{aligned}$$

- Definiere Monotonie und Beschränktheit einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wie sieht es mit diesen Begriffen für Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ aus?
- Was ist $(a - x) \cdot (b - x) \cdot \dots \cdot (z - x)$?

Aufgabe 2. Fragen zur Analysis

- Wie lautet die Eulersche Formel?
- Gebe ein notwendiges und ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ an.
- Gebe ein hinreichendes Kriterium für die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ an.
- Stelle $e^{2\pi i}$, $e^{i\pi}$ und $\frac{1}{i}$ in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.
- Warum ist \mathbb{Q} unvollständig?

f) Kann es eine konvergente Folge (a_n) geben für die gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n ?$$

Gebe eine Folge (a_n) an für die sich

$$\inf a_n, \sup a_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ und } \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

paarweise unterscheiden.

g) Was ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$?

h) Wie lautet das Archimedische Axiom? Nenne einen Körper, der es erfüllt.

i) Wie ist der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$? Welchen Wert hat die Reihe für $x = 3$?

j) Wie ist das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{\alpha} x^n$ für $\alpha, x \in \mathbb{R}$?

k) Wie sieht es mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ für verschiedene Werte von $x \in \mathbb{R}$ aus?

Aufgabe 3. Fragen zur Linearen Algebra

a) Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Gebe 2 äquivalente Aussagen zu „ B ist Basis von V “.

b) Wie viele Elemente hat ein kleinster Vektorraum? Gib ein Beispiel an.

c) Warum ist der Matrizenring $M(n, n, \mathbb{R})$ kein Körper?

d) Gib eine Basis für $\{0\}$ an.

e) Wie lautet die Cauchy-Schwarz-Ungleichung? Wann gilt die Gleichheit?

f) Sind folgende Mengen linear unabhängig (im entsprechenden \mathbb{R}^n)

A)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix} \right\}$$

B)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

C)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

D)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

g) Berechne für

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

den Kern, das Bild, die Determinante und das Inverse (falls existent).

h) Sei $B = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis des \mathbb{R}^2 und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung gegeben durch

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \text{ und } f(e_2) = e_1 - e_2$$

Gib die Koordinatenmatrix dieser Abbildung bezüglich der Basis B an.

i) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

. Zeige, dass gilt $A^{2k} = 2^{2k}E$ (wobei $E \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ die Einheitsmatrix ist)

j) Berechne $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ von $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.