Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Bonn
Abt. Mathematische Methoden der Physik
Prof. Dr. Felix Otto
Dr. Michael Westdickenberg

Bonn, den 9. Februar 2002

Analysis I

Klausur B

Name:

Vorname:

aus: Köln!

Matrikelnummer:

Übungsgruppe:

Bitte erst bei Klausurbeginn umblättern!

Tragen Sie als erstes Ihren Namen, ihre Matrikelnummer, den Herkunftsort (PLZ und Stadt) und Ihre Übungsgruppe ein. Schreiben Sie bitte leserlich! Klausuren ohne diese Angaben werden nicht berücksichtigt. Nach Klausurbeginn lesen Sie zunächst den Aufgabenzettel komplett durch und beginnen Sie mit den Ihnen am einfachsten erscheinenden Aufgaben. Auch hier: Schreiben Sie klar und deutlich! **Unbeaufsichtigtes Verlassen des Hörsaals und Abschreiben beim Nachbarn führen zu sofortiger Disqualifikation. Die Teilnahme an der Nachklausur ist dann ausgeschlossen.** Wenn Sie früher fertig werden sollten, dann geben Sie die Klausur vorne ab. Ansonsten bleiben Sie bei Klausurende bitte so lange sitzen, bis alle Klausuren eingesammelt sind.

Termin Nachklausur: Freitag, den 22. Februar 2002.

Für die Teilnahme an der Nachklausur ist eine Anmeldung erforderlich.

Viel Erfolg!

Aufgabe Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
Gruppe 1													
Gruppe 2													
Gruppe 3													

Gruppe 1 Definitionen, Sätze

1. Es seien $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und $c \in (a,b)$ ein lokales Maxim
   Was wissen Sie über die Ableitungen von f in c?

2. Wie lautet der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion?

/1

3. Wann ist eine Funktion $f\colon M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton bzw. streng monoton wachsend?

/1

4. Definieren Sie die Stetigkeit einer Funktion $f\colon M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ~~in einem Punkt $x_0 \in M$~~
   - durch Umgebungen (Kugeln)
   - durch offene/abgeschlossene Mengen
   - durch Folgen.

/3

5. Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$.

/2

6. Zeigen Sie: Es existiert höchstens eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f' = -f$ und $f(0) = 1$.

/2

7. Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit $f(x) = x^r$ für $r \in \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und es gilt $f'(x) = rx^{r-1}$ für alle x.

/2

8. Es sei X ein Vektorraum mit einer Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie: $|\|x\| - \|y\|| \le \|x-y\|$ für alle $x, y \in X$.

/2

9. Wann ist eine Funktion $f\colon M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex?

$\boxed{\quad /}$

10. Was ist eine Folge in $\mathbb{R}^n$? Was ist ein Häufungspunkt einer Folge?

$\boxed{\quad /2}$

11. Definieren Sie die Differenzierbarkeit einer Funktion $f\colon M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in M$

- durch lineare Approximation
- durch stetige Ergänzung des Differenzenquotienten.

$\boxed{\quad /2}$

12. Definieren Sie die Funktionen $(\cos, \sin)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\boxed{\quad /1}$

5. Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ und $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.

/

6. Es sei $f\colon M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig mit M kompakt. Zeigen Sie: $f(M)$ ist kompakt.

/2

7. Es sei $f\colon M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in M$. Zeigen Sie: $f'(x_0)$ ist eindeutig definiert.

/2

8. Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$.

/2

Gruppe 3 Rechenaufgaben, Beispiele

1. Geben Sie ein Beispiel für eine stetige, aber nicht gleichmäßig stetige Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$.

/1

2. Berechnen Sie das Minimum der Funktion $f\colon (\frac{1}{8}, \infty) \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) := \frac{1}{8x-1} + 4x^2 - x.$$

/2

3. Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t+3}-\sqrt{t}}{\sqrt{t+2}} t$.

/2

4. Geben Sie ein Beispiel für eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) \neq 0$ und $f(x) = 0$ für alle $x \notin (-1,1)$.

/1

5. Definieren Sie die Differenzierbarkeit einer Funktion $f\colon M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in M$

- durch lineare Approximation
- durch stetige Ergänzung des Differenzenquotienten.

/

6. Was ist das Prinzip der vollständigen Induktion?

/1

7. Wann ist eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ offen in $\mathbb{R}^n$? Wann abgeschlossen?

/1

8. Definieren Sie die Kompaktheit einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$

- durch Überdeckungen mit offenen Mengen
- durch Folgen.

/2

Gruppe 2 Beweise

1. Zeigen Sie: Die Funktion $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$ mit $\arccos = \cos^{-1}$ ist in $(-1,1)$ differenzierbar und es gilt $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ für alle y.

/2

2. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer, nach oben beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\sup A \in A$.

/2

3. Es sei X ein Vektorraum mit einer Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie: $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ für alle $x, y \in X$.

/2

4. Zeigen Sie die Stetigkeit der Addition $+\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y \in \mathbb{R}$

/2

Gruppe 1 Definitionen, Sätze

1. Wann ist eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ offen in $\mathbb{R}^n$? Wann abgeschlossen?

/

2. Wie lautet die Regel von de L'Hospital?

/1

3. Definieren Sie die Stetigkeit einer Funktion $f\colon M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ~~in einem Punkt $x_0 \in M$~~
   - durch Umgebungen (Kugeln)
   - durch offene/abgeschlossene Mengen
   - durch Folgen.

/3

4. Was ist das Prinzip der vollständigen Induktion?

/1

Gruppe 3 Rechenaufgaben, Beispiele

1. Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} x^{-p} \log^2 x$ mit $p > 0$.

/2

2. Es seien $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine differenzierbare Funktion und $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) := \frac{2x}{(1-x^2)^{5/2}}.$$
Berechnen Sie die Ableitung von $h\colon (-1,1) \to \mathbb{R}^+$ mit $h := g \circ f$.

/2

3. Geben Sie ein Beispiel für eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) \neq 0$ und $f(x) = 0$ für alle $x \notin (-1,1)$.

/1

4. Geben Sie ein Beispiel für eine Folge mit Häufungspunkt, aber ohne Grenzwert.

/1

5. Geben Sie zwei Formulierungen des Vollständigkeitsaxioms an.

/2

6. Definieren Sie die Kompaktheit einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$

- durch Überdeckungen mit offenen Mengen
- durch Folgen.

/2

7. Geben Sie ein hinreichendes Kriterium dafür an, daß eine differenzierbare Funktion $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ im Punkt $c \in (a, b)$ ein lokales Minimum hat.

/1

8. Wie lautet der Mittelwertsatz der Differentialrechnung?

/1

9. Wie lautet der Zwischenwertsatz?

10. Definieren Sie die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

/1

11. Was ist eine Folge in $\mathbb{R}^n$? Was ist der Grenzwert einer Folge?

/1

12. Geben Sie zwei Formulierungen des Vollständigkeitsaxioms an.

/2

/2

Gruppe 2 Beweise

1. Zeigen Sie die Stetigkeit der Multiplikation $\cdot : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy \in \mathbb{R}$.

/

2. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer, nach unten beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\inf A \in A$.

/2

3. Es sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig mit M kompakt. Zeigen Sie: $f(M)$ ist kompakt.

/2

4. Es sei $f : M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in M$. Zeigen Sie: f ist in x_0 stetig.

/2