Klausur Analysis II (SS 2005)

Prof. Dr. J. Franke

Abschlußklausur vom 21. Juli 2005

Name, Vorname:	
Matrikelnummer:	
Gruppe, Tutor:	
Pseudonym:	

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Mit 25 Punkten oder mehr von 50 ist die Klausur bestanden!

Aufgabe:	1	2	3	4	Gesamt
I	von 10	von 6	von 2	von 1	von 19
II	von 2	von 2	von 2	____	von 6
III	von 3	von 3	von 3	____	von 9
IV	von 4	von 4	von 5	von 3	von 16
V	von *4	____	____	____	von *4
Gesamt	____	____	____	____	von 50

Korrektor:	Prüfer:
(G. Weingart)	(Prof. Dr. J. Franke)

Vor Beginn unbedingt durchlesen!

- *Diese Klausur besteht aus 6 Seiten mit 15 Aufgaben und maximal erreichbaren 50 Punkten. Von diesen 50 müssen Sie mindestens 25 Punkte erreichen, um die Klausur zu bestehen.*
- *Ihre Antworten zu allen Fragen müssen in die Aufgabenblätter in die dafür vorgesehenen Felder eingetragen werden. Anworten außerhalb dieser Felder werden nicht gewertet!*
- *Bei den Rechenaufgaben gibt es ein Ansatzfeld, das Sie nur auszufüllen brauchen, wenn Sie sich beim Ergebnis nicht sicher sind. In diesem Ansatzfeld können Sie mit Stichworten oder auch Gleichungen deutlich machen, welchen Rechenweg Sie gehen.*
- *Die Punkte erhalten Sie in den Rechenaufgaben für das richtige Ergebnis unabhängig vom Ansatz. Falls das Ergebnis allerdings falsch sein sollte, dann kann der richtige Ansatz im ausgefüllten Ansatzfeld immerhin noch mit einem Teil der Punkte bewertet werden.*
- *Die Lösung muss so weit wie möglich vereinfacht werden. Unvollständig vereinfachte Ausdrücke wie* $\sin\frac{\pi}{4}$ *oder* $\ln 6 - \ln 2$ *können zu Punktabzug führen. Bitte ersparen Sie sich und uns Ergebnisse in Dezimalschreibweise oder gemischte Brüche!*
- *Wir erinnern an unsere Bezeichnungsweisen für die vollständigen elliptischen Integrale*

$$K(k) \;:=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin(\phi)^2}} \qquad E(k) \;:=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin(\phi)^2}\,d\phi$$

für $0<k<1$*, sowie an die unvollständige Gammafunktion* $\Gamma(a,x) \;:=\; \int_x^\infty t^{a-1}\exp(-t)dt$.

I. Rechnen

Aufgabe I.1. *(2+2+2+2+2 Punkte)*

Berechnen Sie die folgenden bestimmten bzw. uneigentlichen Integrale:

Integral	Ansatz	Ergebnis
$\displaystyle\int_{-1}^{1} \sin(x^{2005})\,dx$	Schiefsymmetrie von $x \longmapsto \sin(x^{2005})$, also $\sin((-x)^{2005}) = -\sin(x^{2005})$. Integral verschwindet bei symmetrischen Grenzen.	0
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,dx$	partielle Integration: $x\sin(x)\rvert_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$	$\frac{\pi}{2}-1$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(x)\,dx}{1+\exp(2x)}$	Substitution $u=e^x$ mit $du=e^x dx$: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}$, Stammfunktion kenne ich: Arkustangens.	$\arctan(u)\rvert_{u=0}^{u=\infty} = \frac{\pi}{2}$
$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)\,dx}{1+\sin(x)^2}$	Substitution $u = -\cos x$, $du = \sin x\,dx$ mit $2-u^2 = 1+\sin(x)^2$, Partialbruchzerlegung $\frac{du}{2-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{du}{\sqrt{2}+u} + \frac{du}{\sqrt{2}-u}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log(3+\sqrt{8})$
$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\,dx$	Substitution $x=\cos\phi$, $dx = -\sin\phi\,d\phi$: $-\int_\pi^0 \sqrt{\frac{1+\cos(\phi)^2}{1-\cos(\phi)^2}}\sin\phi\,d\phi = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin(\phi)^2}\,d\phi$	$2\sqrt{2}\,E(\frac{1}{\sqrt{2}})$

Aufgabe I.2. *(2+2+2 Punkte)*

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme auf $\mathbb{R}$:

Gleichung	Anfangsw.	Ansatz	Ergebnis
$f''(x) = \frac{1}{x+i} f'(x)$	$f(1) = 0$ $f'(1) = 1$	$g := f'$ löst $g'(x) = \frac{1}{x+i} g(x)$. Separation der Variablen: $\int_{g(1)}^{g(u)} \frac{dg}{g} = \int_1^u \frac{dx}{x+i}$	$g(x) = \frac{x+i}{1+i}$ $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2+ix-\frac{1}{2}-i}{1+i}$
$f'(x) = \frac{1}{x+i}(\, f(x) + 1\,)$	$f(1) = 1$	Separation der Variablen: $\int_{f(1)}^{f(u)} \frac{df}{f+1} = \int_1^u \frac{dx}{x+i}$	$f(x) = 2\frac{x+i}{1+i} - 1$
$f'(x) = \frac{1}{2(x+i)}(\, f(x)^2 + f(x)\,)$	$f(1) = 1$	Separation der Variablen: $\int_{f(1)}^{f(u)} \frac{df}{f^2+f} = \int_1^u \frac{dx}{2(x+i)}$	$f(x)$ $= \frac{\sqrt{x+i}}{2\sqrt{1+i}-\sqrt{x+i}}$

Die Separation der Variablen ist sicherlich eine schwer verständliche Methode, gewöhnliche Differentialgleichungen zu lösen. Speziell ist es kaum möglich, im Rahmen der Analysis–Grundvorlesungen eine befriedigende Rechtfertigung für die notwendigen Rechnungen zu geben. Der eigentliche Clou dieser Methode ist aber, dass man die Funktion f zwischenzeitlich als unabhängige Variable betrachten muß, um nicht Schiffbruch zu erleiden. Ich will die letzte Aufgabe genauer vorrechnen:

Zunächst kann man die Variablen x und f nur dann „separieren", wenn die Differentialgleichung von der Form $f'(x) = (\text{Ausdruck in } x)(\text{Ausdruck in } f(x)) = a(x)b(f(x))$ ist, also wie im letzten Beispiel $f'(x) = (\frac{1}{2(x+i)})(f(x)^2 + f(x))$ mit $a(x) = \frac{1}{2(x+i)}$ und $b(f) = f^2 + f$. Die Methode der Separation der Variablen beruht nun darauf, dass die gesuchte Lösung $u \longmapsto f(u)$ der Differentialgleichung als Obergrenze des linken Integrals die Integralidentität

$$\int_{f(u_0)}^{f(u)} \frac{df}{b(f)} \quad = \quad \int_{u_0}^{u} a(x)dx$$

für vollkommen beliebige u und u_0 gültig macht. Praktischerweise wählt man aber für u_0 die Stelle, an der man den Anfangswert $f(u_0)$ kennt, während man u als neue Variable auffaßt. Ganz wichtig: Im linken Integral steht f als unabhängige Variable, nur die Grenzen dieses Integrals erinnern uns an die gesuchte Funktion $u \longmapsto f(u)$! Im dritten Beispiel erfüllt die gesuchte Funktion $u \longmapsto f(u)$ also die Integralidentität:

$$\int_{f(1)}^{f(u)} \frac{df}{f^2+f} \quad = \quad \int_1^u \frac{dx}{2(x+i)}$$

Eine Stammfunktion des linken Integrals bekommt man durch die Zerlegung $\frac{df}{f^2+f} = \frac{df}{f} - \frac{df}{f+1}$:

$$\int_{f(1)}^{f(u)} \frac{df}{f^2+f} \quad = \quad \log \frac{f}{f+1}\Big|_{f=f(1)=1}^{f=f(u)} \quad = \quad \log \frac{f(u)}{f(u)+1} \; - \; \log \frac{1}{2}$$

Das Integral auf der rechten Seite ist einfacher $\int_1^u \frac{dx}{2(x+i)} = \frac{1}{2}\log\frac{u+i}{1+i}$. Bringt man $\log\frac{1}{2}$ auf die rechte Seite und exponentiert, dann wird aus der Integralidentität der Methode der Separation der Variablen:

$$1 - \frac{1}{f(u)+1} \quad = \quad \frac{f(u)}{f(u)+1} \quad = \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+i}{1+i}}$$

Löst man das nach $f(u)$ auf, so erhält man die Lösung:

$$f(u) \quad = \quad \frac{1}{1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+i}{1+i}}} \;-\; 1 \quad = \quad \frac{2\sqrt{1+i}-2\sqrt{1+i}+\sqrt{u+i}}{2\sqrt{1+i}-\sqrt{u+i}}$$

Die anderen beiden Differentialgleichung kann man vollkommen analog lösen.

Aufgabe I.3. *(1+1 Punkte)*
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen auf dem offenen Intervall $(0,\infty)\subset\mathbb{R}$:

Funktion	Ansatz	Ergebnis
$\sin(x^x)$	Kettenregel mit innerer Ableitung: $\frac{d}{dx}x^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln x} = e^{x\ln x}(\ln x+1) = x^x(\ln x+1)$.	$\cos(x^x)x^x(\ln x+1)$
$\Gamma(\frac{1}{2},x^2)$	Ableiten eines Integrals nach unterer Grenze (Vorzeichen!): $\frac{d}{dx}\int_x^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt \;=\; -x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}$, Kettenregel.	$-(x^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-x^2}(2x)$ $= -2e^{-x^2}$

Aufgabe I.4. *(1 Punkt)*
Bestimmen Sie die Menge der Häufungspunkte der Folge

$$\left(2^{-n/2}(1+i)^n\right)_{n=0}^{\infty} \qquad\qquad \{\,\tfrac{1+i}{\sqrt{2}},\, i,\, \tfrac{1-i}{\sqrt{2}},\, -1,\, \tfrac{-1-i}{\sqrt{2}},\, -i,\, \tfrac{1-i}{\sqrt{2}},\, 1\,\}$$

Die komplexe Zahl $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ist eine 8. Einheitswurzel. Häufungspunkte sind alle 8. Einheitswurzeln.

II. Wissen

Aufgabe II.1. *(2 Punkte)*
Formulieren Sie eine möglichst allgemeine Bedingung an eine Selbstabbildung $K:\ E\longrightarrow E$ eines abstrakten Banachraums E in sich, welche für jedes $e\in E$ die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems $f'(t)=K(f(t))$, $f(0)=e$ auf $[0,\infty)$ garantiert! Diese Bedingung darf NICHT auf die Beschreibung eines oder mehrerer Banachräume E und zugehöriger Gleichungen $f'(t)=K(f(t))$ hinauslaufen, für die man explizite Lösungsformeln oder –verfahren kennt.

Wenn eine Selbstabbildung $K:\ E\longrightarrow E$ eines Banachraums E (global) Lipschitz–stetig mit Konstante C ist, also für alle e_1, e_2 aus E die Ungleichung $\|\,K(e_2)-K(e_1)\,\|_E\leq C\,\|\,e_2-e_1\,\|_E$ gilt, dann existiert für jedes $e\in E$ eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $f'(t)=K(f(t))$, $f(0)=e$ auf $[0,\infty)$. (Falls K nur lokal Lipschitz–stetig ist, es also zu jedem $e\in E$ eine Umgebung U_e von e und eine Konstante C_e mit $\|\,K(e_2)-K(e_1)\,\|_E\leq C_e\,\|\,e_2-e_1\,\|_E$ für alle e_1, $e_2\in U_e$ gibt, dann existiert eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $f'(t)=K(f(t))$, $f(0)=e$ im allgemeinen nur für eine bestimmte Zeit $[0,T_e)$, $T_e>0$.)

Aufgabe II.2. *(2 Punkte)*
Wann nennt man eine auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ definierte $\mathbb{C}$–wertige Funktion holomorph?

Eine auf einer offenene Teilmenge $U\subset\mathbb{C}$ definierte Funktion $f:\ U\longrightarrow\mathbb{C}$ heißt holomorph, wenn sie in jedem Punkt $u\in U$ ihres Definitionsbereichs komplex differenzierbar ist, das heißt, wenn für alle $u \in U$ der Grenzwert des komplexen Differentialquotienten $\lim_{h\to 0}\frac{f(u+h)-f(u)}{h}$ existiert. (Hier kann h als komplexe Zahl auf sehr unterschiedliche Art und Weise gegen 0 gehen, es genügt nicht, dass der Grenzwert etwa für reelle h existiert.)

Aufgabe II.3. *(2 Punkte)*
Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz!

Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $T:\ X \longrightarrow X$ eine kontrahierende Selbstabbildung, das heißt es gibt eine Konstante $0 \leq C < 1$ strikt kleiner 1 mit $d(T(x), T(\tilde{x})) \leq Cd(x, \tilde{x})$ für alle $x,\ \tilde{x} \in X$. Dann hat T genau einen Fixpunkt $x_0 = Tx_0$ in X. (Diesen Fixpunkt erhält man etwa als Grenzwert der Cauchyfolge $(T^n x)_{n\geq 0}$ mit einem beliebigen Anfangswert $x \in X$.)

III. Beweisen

Aufgabe III.1. *(3 Punkte)*
Zeigen Sie, daß das folgende Gleichungssystem eine eindeutig bestimmte Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ hat:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{y+\cos(x)}{9} \\ y &= \tfrac{x+\sin(y)}{9} \end{aligned}$$

Ich betrachte die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der ℓ^∞–Norm $\|\,(x,y)\,\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$. Aus den Übungsaufgaben wissen wir, dass $\mathbb{R}^2$ mit dieser ℓ^∞–Norm ein Banachraum, also insbesondere ein vollständiger metrischer Raum wird. Die Lösungen des betrachteten Gleichungssystems entsprechen eins zu eins den Fixpunkten der Selbstabbildung $K:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $K(x,y) := (\frac{y+\cos(x)}{9}, \frac{x+\sin(y)}{9})$. Andererseits sind cos und sin Lipschitz–stetig mit Lipschitz–Konstanten 1 wegen $|\cos'(x)| \leq 1$ und $|\sin'(x)| \leq 1$. Infolgedessen ist K eine Kontraktion mit Kontraktionskonstanten $\frac{2}{9} < 1$:

$$\begin{aligned} \|\,K(x_2,y_2) - K(x_1,y_1)\,\|_\infty &= \max\{\frac{|y_2+\cos(x_2)-y_1-\cos(x_1)|}{9}, \frac{|x_2+\sin(y_2)-x_1-\cos(y_1)|}{9}\} \\ &\leq \frac{1}{9}\max\{|y_2-y_1|+|\cos(x_2)-\cos(x_1)|, |x_2-x_1|+|\sin(y_2)-\sin(y_1)|\} \\ &\leq \frac{1}{9}(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|) \quad\leq\quad \frac{2}{9}\|\,(x_2,y_2)-(x_1,y_1)\,\|_\infty \end{aligned}$$

Als Kontraktion auf dem vollständigen, metrischen Raum $\mathbb{R}^2$ hat die Kontraktion K einen eindeutigen Fixpunkt (x_0, y_0) nach dem Banachschen Fixpunktsatz, also hat das obige Gleichungssystem genau eine Lösung (x_0, y_0).

Aufgabe III.2. *(3 Punkte)*
Beweisen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung!

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung lautet: Ist eine Funktion $f:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar, dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) \quad=\quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ich betrachte die Hilfsfunktion $g:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := f(x) - (f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a})$. Als Summe der auf $[a,b]$ stetigen und auf (a,b) differenzierbaren Funktion f und eines linearen

Polynoms (das überall differenzierbar ist) ist g ebenfalls auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Außerdem gilt offenbar $g(a) = 0$ und $g(b) = f(b) - (f(a) + (b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}) = 0$. Nach dem Satz von Rolle hat g' damit eine Nullstelle ξ in dem offenen Intervall (a, b). Für diese Nullstelle ξ gilt dann aber nach Konstruktion $g'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Die Aufgabe war so gedacht, dass Ihr den Satz von Rolle zitieren solltet. Falls man sicherheitshalber in der Klausur den Satz von Rolle nicht zitieren wollte, dann mußte man noch das im Beweis benutzte Argument anführen: Als stetige Funktion nimmt g auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ sein Maximum und sein Minimum an. Sind beide Extrema gleich 0, dann ist g identisch gleich 0 und $g'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a, b)$. Ansonsten wird wegen $g(a) = 0 = g(b)$ zumindest ein Extremum von g an einer Stelle $\xi \in [a, b]$ ungleich a, b, also $\xi \in (a, b)$ angenommen. Weil g in ξ nach Voraussetzung differenzierbar ist, gilt $g'(\xi) = 0$.

Aufgabe III.3. *(3 Punkte)*

Zeigen Sie: Die im folgenden definierte Potenzreihe $J_0(z)$ konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$:

$$J_0(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{(k!)^2}$$

Die Verführung dieser Aufgabe ist es, dass man das Quotientenkriterium direkt ausnutzen will, weil es so schön einfach aussieht. Allerdings ist J_0 eine gerade Potenzreihe und jeder ungerade Koeffizient ist 0.

Ich betrachte statt der Potenzreihe J_0 die Potenzreihe $j_0(w) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!^2}$. Für festes $w \in \mathbb{C}$ konvergiert der Quotient zweier aufeinanderfolgender Summanden dieser Reihe

$$\left| \frac{\frac{w^{k+1}}{(k+1)!^2}}{\frac{w^k}{k!^2}} \right| \;=\; \frac{|w|}{(k+1)^2}$$

für $k \to \infty$ gegen 0, also konvergiert $j_0(w)$ absolut für beliebiges $w \in \mathbb{C}$ nach dem Quotientenkriterium. Speziell konvergiert dann auch $J_0(z) \;=\; j_0(-\frac{z^2}{4})$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

IV. Entscheiden

Lesen Sie die Aussagen jeweils sorgfältigst durch, oft entscheiden nur Feinheiten über den Wahrheitsgehalt! Jede richtige Antwort gibt einen Plus–, jede falsche einen Minuspunkt, unausgefüllte Felder zählen nichts. Die Punkte werden aufgabenweise abgerechnet, wobei eventuell auftretende negative Endsummen vergessen werden.

Aufgabe IV.1. *(4 Punkte)*

Kennzeichnen Sie Funktionen, welche auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph sind, mit H, und alle anderen mit N!

- H — $f(z) := \exp(\sin(z))$.
- N — $f(z) := \tanh(z) := \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{\exp(z)+\exp(-z)}$
- N — $f(z) := \exp(-\mathrm{Re}\,(z)^2 - \mathrm{Im}\,(z)^2)$
- H — Die in Teil III definierte Funktion $J_0(z)$.

Als Verkettung der holomorphen Funktionen exp und sin ist die erste Funktion holomorph auf $\mathbb{C}$. Klar ist tanh holomorph dort, wo es definiert ist, leider hat tanh aber Pole an den Stellen $z = \frac{k\pi i}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ungerade. Sobald $\overline{z}$ auftaucht wie in $\mathrm{Re}\,(z)^2 + \mathrm{Im}\,(z)^2 = z\,\overline{z}$, ist eine Funktion höchstwahrscheinlich nicht holomorph. Die Funktion J_0 ist durch eine Potenzreihe mit unendlichem Konvergenzradius definiert, also auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

Aufgabe IV.2. *(4 Punkte)*

Kennzeichnen Sie wahre Behauptungen mit W und falsche Behauptungen mit F.

$\boxed{\text{W}}$ Das Anfangswertproblem $f'(t) = \exp(t^3)f(t)$ mit $f(0) = 1$ hat eine eindeutig bestimmte Lösung $f:\ [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$.

$\boxed{\text{F}}$ Das Anfangswertproblem $f'(t) = f(t)^3$ mit $f(0) = 1$ hat eine eindeutig bestimmte Lösung $f:\ [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$.

$\boxed{\text{F}}$ Das Anfangswertproblem $f'(z) = \sqrt{f(z)}$ mit $f(0) = 0$ hat eine eindeutig bestimmte Lösung $f:\ [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$.

$\boxed{\text{W}}$ Folgendes Anfangswertproblem hat eine eindeutig bestimmte Lösung $(s, c, d):\ [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rclr}
s'(t) & = & c(t)d(t) & s(0) = 0 \\
c'(t) & = & -s(t)d(t) & c(0) = 1 \\
d'(t) & = & -\frac{1}{2}s(t)c(t) & d(0) = 1
\end{array}$$

Im ersten Problem ist $K(t, u) := \exp(t^3)u$ bei beliebig gewähltem $T > 0$ Lipschitz–stetig in u für alle $t \in [0, T]$ mit Lipschitzkonstante $C = \exp(T^3)$. Also existiert eine eindeutige Lösung auf $[0, T]$ für beliebig großes $T > 0$, damit auch auf $[0,\infty)$. Die Lösung ist übrigens $f(t) = \exp(\int_0^t \exp(u^3)du)$. Im zweiten Problem ist $K(t, u) = u^3$ zwar lokal Lipschitz–stetig in u in dem Sinne, dass es für beliebiges $U > 0$ Lipschitz–stetig in $u \in [-U, U]$ mit Lipschitzkonstante $3U^2$ ist, aber nicht global Lipschitz–stetig. Tatsächlich explodiert die für kurze Zeiten eindeutige Lösung $f(t) = (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}}$ zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{2}$. Im dritten Problem ist $K(t, u) = \sqrt{u}$ überhaupt nicht Lipschitz–stetig im Anfangswert $u = 0$, obwohl $u \longmapsto \sqrt{u}$ auf ganz $(0,\infty)$, aber eben nicht in $u = 0$, differenzierbar ist. Tatsächlich hat das dritte Problem die beiden Lösungen $f(t) = 0$ und $f(t) = (\frac{1}{2}t)^2 = \frac{1}{4}t^2$.

Das vierte Problem schließlich wurde in der Vorlesung intensiv behandelt, seine eindeutig bestimmte Lösung $t \longmapsto (sn(t), cn(t), dn(t))$ definiert gerade die Jacobischen elliptischen Funktionen sn, cn und dn. Davon abgesehen kann man sich zunächst überlegen, dass für jede Lösung $s(t)^2 + c(t)^2 = 1 = s(0)^2 + c(0)^2$ konstant in der Zeit ist. Damit ist aber die Ableitung $|d'| \leq \frac{1}{4}$ beschränkt und aus dem Mittelwertsatz folgt $|d(t)| \leq \frac{t}{4}$. Die so gewonnenen apriori–Abschätzungen $|s| \leq 1$, $|c| \leq 1$ und $|d| \leq \frac{t}{4}$ besagen insbesondere, dass eine Lösung nicht in endlicher Zeit explodieren kann. Das ist zwar noch kein vollständiges Argument, aber ein ziemlich sicheres Zeichen dafür, dass das vierte Problem eine eindeutige Lösung auf $[0,\infty)$ besitzt.

Aufgabe IV.3. *(5 Punkte)*

In den folgenden Behauptungen ist E ein beliebiger komplexer Banachraum. Kennzeichnen Sie wahre Behauptungen mit W und falsche Behauptungen mit F!

$\boxed{\text{W}}$ Jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ von $\mathbb{R}$ in einen Banachraum E mit beschränkter Ableitung, also mit $\| f'(t) \|_E \leq C$ für eine geeignete Konstante C, ist Lipschitz–stetig!

$\boxed{\text{F}}$ Die Funktion $\sin(t)$ ist konvex auf $[0, \pi]$.

$\boxed{\text{W}}$ Die Funktion $\cos(t)$ ist konkav auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$\boxed{\text{F}}$ Wenn $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E$ stetig ist und die partiellen Ableitungen $F_x(x,y) := \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ und $F_y(x,y) := \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ existieren, so gilt für alle differenzierbaren, $\mathbb{R}$–wertigen Funktionen a und b auf $\mathbb{R}$ die Formel:

$$\frac{d}{dt}F(a(t), b(t)) \;=\; a'(t)\,F_x(a(t), b(t)) \;+\; b'(t)\,F_y(a(t), b(t))\,.$$

$\boxed{\text{W}}$ Wenn $f : \mathbb{C} \longrightarrow E$ holomorph ist, so ist die auf $\mathbb{R}^2$ durch $g(x,y) := f(x+iy)$ definierte Funktion g total differenzierbar.

Konvex bzw. konkav ist eine Funktion genau dann, wenn die Fläche oberhalb bzw. unterhalb ihres Graphen konvex als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist. Die Fläche oberhalb des Graphen von sin auf $[0,\pi]$ ist offenbar nicht konvex. Andererseits ist die Fläche unterhalb des Graphen von cos auf $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ konvex, also ist cos auf diesem Intervall konkav.

Die erste Antwort kann man ganz gut raten, ein formales Argument benutzt den Satz von Hahn–Banach, der in der Vorlesung zitiert, aber nicht bewiesen wurde. Demnach gibt es zu allen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ein stetiges lineares Funktional $\alpha : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\alpha(f(b) - f(a)) = \|\, f(b) - f(a)\,\|_E$ und $|\alpha(e)| \leq \|\, e\,\|_E$ für alle $e \in E$. Die Verkettung $\alpha \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $(\alpha \circ f)' = \alpha \circ f'$, weil f auf $\mathbb{R}$ ifferenzierbar ist nach Voraussetzung. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es also ein $\xi \in (a,b)$ mit:

$$(\alpha \circ f)'(\xi) \;=\; \frac{\alpha(f(b) - f(a))}{b-a} \;=\; \frac{\|\, f(b) - f(a)\,\|_E}{b-a} \;=\; \alpha(f'(\xi)) \;\leq\; \|\, f'(\xi)\,\|_E \;\leq\; C$$

Ein Gegenbeispiel zu der vierten Frage liefert jede Funktion $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E$, die auf $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar, aber nicht total differenzierbar ist, etwa $F(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $F(0,0) = 0$. In diesem Beispiel existieren F_x und F_y überall auf $\mathbb{R}^2$, aber $t \longmapsto F(t,t)$ ist noch nicht einmal differenzierbar in $t = 0$! Die Sache sieht vollkommen anders aus, wenn zusätzlich gefordert wird, dass F_x und F_y stetig auf $\mathbb{R}^2$ sind! Dann ist F nämlich stetig partiell und damit total differenzierbar und die behauptete Formel gilt nach der Kettenregel. Die letzte Frage bezieht sich auf die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen.

Aufgabe IV.4. *(3 Punkte)*

Kennzeichnen Sie wahre Behauptungen mit W und falsche Behauptungen mit F!

$\boxed{\text{W}}$ Jede kompakte Teilmenge eines Banachraumes E ist beschränkt und abgeschlossen.

$\boxed{\text{W}}$ Wenn X ein beliebiger metrischer Raum und $T : X \longrightarrow X$ eine kontrahierende Abbildung ist, so hat T höchstens einen Fixpunkt.

$\boxed{\text{W}}$ Der Durchschnitt zweier konvexer Teilmengen eines Banachraumes E ist konvex.

Im Falle $E = \mathbb{R}^n$ ist die erste Aussage die eine Richtung des Satzes von Heine–Borel. Wenn man sich an den Beweis erinnert, kann man leicht nachprüfen, dass das im Beweis benutzte Argument für jeden Banachraum E durchgeht (die andere Richtung von Heine–Borel ist hoffnungslos falsch für allgemeine Banachräume). Für die Beschränkheit betrachtet man die Überdeckung von E durch die offenen Bälle $\{e \in E |\; \|\, e\,\|_E < n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, für die Abgeschlossenheit die Überdeckung von $E \setminus \{x\}$ durch die offenen Bälle $\{e \in E |\|\, x - e\,\|_E > \frac{1}{n}\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Für die zweite Aussage nehmen wir einmal an, dass es zwei verschiedene Fixpunkte $x \neq \tilde{x}$ von T in X gebe. Dann gilt $x = T(x)$ und $\tilde{x} = T(\tilde{x})$ und wir erhalten den Widerspruch $d(x,\tilde{x}) = d(T(x), T(\tilde{x})) < d(x,\tilde{x})$, weil T nach Voraussetzung kontrahierend ist. Wenn in der letzten Aussage alle Punkte der Strecke $(1-t)x + t\tilde{x}$, $t \in [0,1]$, sowohl in der ersten, als auch in der zweiten konvexen Teilmenge liegen, dann auch in ihrem Schnitt.

Zusatzfragen

Aufgabe V.1. *(2+2 Zusatzpunkte)*
Mit diesen Zusatzaufgaben können Sie bis zu vier Zusatzpunkte erhalten!

$\boxed{\text{W}}$ Die in Teil III definierte Funktion $J_0(z)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$zJ_0''(z) \;+\; J_0'(z) \;+\; zJ_0(z) \;=\; 0\,.$$

$\boxed{\text{W}}$ Es gibt genau eine stetige Funktion $f:\ [0,1]\times[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, deren partielle Ableitung nach der zweiten Variablen t existiert und stetig ist, so daß gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \;=\; \int_0^1 \cos(\,x\,f(\xi,t)\,)\,d\xi\,, \qquad f(x,0) \;=\; 0 \text{ für alle } x\in[0,1]\,.$$

Die erste Frage ist stures Nachrechnen. Zur Erinnerung war J_0 als Potenzreihe gerade, also sind zJ_0'', J_0' und zJ_0 alle ungerade. Weil J_0 als Potenzreihe überall auf $\mathbb{C}$ absolut konvergiert, darf man gliedweise differenzieren und erhält:

$$\begin{aligned}
&zJ_0''(z)+J_0'(z)+zJ_0(z)\\
&\quad= \sum_{k=0}^{\infty}\left((-\frac{1}{4})^{k+1}\frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)!^2}+(-\frac{1}{4})^{k+1}\frac{2k+2}{(k+1)!^2}+(-\frac{1}{4})^{k}\frac{1}{k!^2}\right)z^{2k+1}\\
&\quad= \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\Big((2k+2)(2k+1)+(2k+2)-4(k+1)^2\Big)}_{=0}\frac{(-\frac{1}{4})^{k+1}}{(k+1)!^2}z^{2k+1}
\end{aligned}$$

Die zweite Frage spielt auf den Satz von Picard–Lindelöf an (und damit implizit wieder auf den Banachschen Fixpunktsatz). Genauer betrachtet man das Anfangswertproblem für differenzierbare Abbildungen $F:\ [0,\infty)\longrightarrow C^0([0,1])$, $t\longmapsto(x\longmapsto f(x,t))$ gegeben durch die (autonome) Differentialgleichung

$$F'(t) \;=\; (x\longmapsto\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)) \;=\; K(F(t))$$

mit $K(F) := (x\longmapsto\int_0^1\cos(xF(\xi))d\xi)$ und den Anfangswert $F(0) = (x\longmapsto 0)$. Weil cos Lipschitz–stetig ist mit Lipschitzkonstante 1, ist auch die Selbstabbildung $K:\ C^0([0,1])\longrightarrow C^0([0,1])$ Lipschitz–stetig mit Lipschitzkonstante 1 wegen

$$\begin{aligned}
\|\,K(F)-K(G)\,\|_{C^0([0,1])} &= \max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^1\cos(xF(\xi))\,d\xi \;-\; \int_0^1\cos(xG(\xi))\,d\xi\right|\\
&\le \max_{x\in[0,1]}\int_0^1|\cos(xF(\xi))-\cos(xG(\xi))\,|\,d\xi\\
&\le \max_{x\in[0,1]}\int_0^1 x\,|\,F(\xi)-G(\xi)\,|\,d\xi \;\le\; \|\,F-G\,\|_{C^0([0,1])}
\end{aligned}$$

und somit existiert eine eindeutige Lösung dieses Anfangswertproblems für alle Zeiten $[0,\infty)$.