Klausur
25.1.1997

Aufgabe 1 ✓
Es sei K ein Körper und $A_0 \in M(3 \times 3, K)$, $A_1 \in M(2 \times 3, K)$, $A_2 \in M(3 \times 4, K)$. Geben Sie alle Paare $(i,j) \in \tilde{3} \times \tilde{3}$ an, für welche das Produkt A_iA_j definiert ist, und geben Sie für jedes solche Paar an, wieviel Zeilen und wieviel Spalten die Matrix A_iA_j hat. (Ohne Beweis!)

Aufgabe 2
Es seien $\varphi : U \longrightarrow V$ und $\psi : V \longrightarrow W$ jeweils K-lineare Abbildungen, so daß $\psi \circ \varphi$ ein Isomorphismus ist. Welche der folgenden Aussagen sind ohne weitere Voraussetzungen richtig? (Ohne Beweis!)

a) φ ist surjektiv ×b) φ ist injektiv
×c) ψ ist surjektiv d) ψ ist injektiv
e) ψ ist ein Isomorphismus f) φ ist ein Isomorphismus

Aufgabe 3 v
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(v_i)_{i<n}$ eine Basis des K-Vektorraums V. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen ohne weitere Voraussetzungen richtig sind. (Ohne Beweis!)

a) V ist endlich-dimensional
b) $\dim V = n$.
c) Es sei $w \in V, w \neq 0$. Dann ist $(v_0, \ldots, v_{n-2}, w)$ linear unabhängig.
d) Sei $w \in V, w \neq 0$. Es gibt ein $k < n$, so daß das System $(w_i)_{i<n}$ linear unabhängig ist. Hierbei ist $w_j := v_j$ für $j < n$ und $j \neq k$, sowie $w_k = w$.

Aufgabe 4 v
Sei $\varphi : V \longrightarrow W$ eine injektive lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen. Geben Sie—ohne Beweis—an, welche der folgenden Aussagen ohne weitere Voraussetzungen richtig sind.

a) $\dim V = \dim W$
b) $\dim V \leq \dim W$
c) $\dim \operatorname{Kern} \varphi > 0$
d) Zu jedem $v \in V$ existiert genau ein $w \in W$ mit $\varphi(v) = w$
e) Zu jedem $w \in W$ existiert genau ein $v \in V$ mit $\varphi(v) = w$

Aufgabe 5 J
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Ferner sei φ ein Endomorphismus von V und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ seien Basen von V. Zeigen Sie:

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = E_n \iff \varphi^2 = \mathrm{id}_V.$$

WS 96/97

Fachschaft Physik/Astronomie
Endenicher Allee 11-13
53115 Bonn
Tel. 0228 / 73-2788

Aufgabe 6 V

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$, und beweisen Sie Ihre Antwort.

$$\begin{aligned} 1x_0 + 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 1x_0 + 0x_1 + 1x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_0 + 0x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 4x_0 + 0x_1 + 3x_2 + 12x_3 &= 4 \end{aligned}$$

V

Aufgabe 7

Überführen Sie die folgende Matrix über $F = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform. Geben Sie dabei jeweils an, welche elementaren Umformungen verwendet werden. Um lästige Schreibarbeit zu sparen, vereinbaren wir für diese Aufgabe, daß eine ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ die Zahl $m + 7\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ bedeutet.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 V

Sei $\pi \in S_n$ eine beliebige Permutation der Menge $\tilde{n}$ und V ein K-Vektorraum mit einer Basis $\mathcal{A} = (v_i)_{i<n}$. Für die lineare Abbildung $F \in \mathrm{End}_K(V)$ gelte

$$F\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i v_{\pi(i)}.$$

Bestimmen Sie (mit Beweis) die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$.

Aufgabe 9

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und U, U_1, U_2 seien Unterräume von V. Ferner gelte $V = U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2 = \{0\} = U \cap U_2$ und $\dim U = \dim U_1$. Zeigen Sie: Es gibt eine lineare Abbildung $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$, so daß

$$U = \{v \in V \mid \exists u \in U_1 : v = u + \varphi(u)\}.$$

(Hinweis: Schreibe $u \in U$ als $u = u_1 + u_2$ mit $u_i \in U_i$.)

Aufgabe 10

Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{A} = (v_i)_{i<n}$ ein System von Vektoren von V. Zeigen Sie: Genau dann ist $\mathcal{A}$ eine Basis von V, wenn für jeden K-Vektorraum W und jedes System $(w_i)_{i<n}$ von Vektoren von W genau eine lineare Abbildung $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ existiert mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle $i < n$.

WS 96/97

Aufgabe 11
Seien U, V, W jeweils endlich-dimensionale K-Vektorräume, $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$ und $\psi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Ferner sei φ injektiv und ψ surjektiv, und es gelte $\mathrm{Kern}\,\psi = \mathrm{Bild}\,\varphi$. Zeigen Sie: Es gibt $\rho \in \mathrm{Hom}_K(W,V)$ und $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(V,U)$, so daß gilt:

$$\psi \circ \rho = \mathrm{id}_W, \quad \sigma \circ \varphi = \mathrm{id}_U \text{ und } \mathrm{Kern}\,\sigma = \mathrm{Bild}\,\rho.$$

(Hinweis: Wähle Basis von W, wähle dann ρ geeignet. Dies legt σ fest.)

Aufgabe 12
Sei V ein K-Vektorraum. Dann ist bekanntlich auch $E := \mathrm{End}_K(V)$ ein K-Vektorraum. Für ein beliebiges $\varphi \in E$ bezeichne L_φ diejenige Abbildung von E nach E mit

$$L_\varphi(\psi) := \varphi \circ \psi.$$

Zeigen Sie, daß L_φ ein Endomorphismus von E ist.
Sei ferner vorausgesetzt, daß V ein 5-dimensionaler K-Vektorraum ist. Gibt es ein $\varphi \in E$, so daß der Kern von L_φ ein 7-dimensionaler Unterraum von E ist? Beweisen Sie ihre Antwort.