Klausur Lineare Algebra I, WS 2005/2006

****

Mit $\mathbb{R}$ ist der Körper der reellen Zahlen gemeint, $\mathbb{Q}$ ist der Körper der rationalen Zahlen, und $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen.

****

Aufgabe 1

(2+1+1+1+1+1)

Gib jeweils an, welche Aussagen RICHTIG sind. Pro Aufgabe können mehrere Optionen richtig sein. Schreibe z.B.

$$(c)\colon A, C$$

wenn Du denkst, daß in Aufgabe 1 (c) die Optionen A und C richtig sind.

(a) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig?

$\boxed{\text{A}}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{\text{B}}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{\text{C}}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{\text{D}}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{\text{E}}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{\text{F}}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(b) Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Der Rang von f ist dann gleich

$\boxed{\text{A}}$ $\dim \operatorname{Kern}(f)$

$\boxed{\text{B}}$ $\dim \operatorname{Bild}(f)$

$\boxed{\text{C}}$ $\dim V$

$\boxed{\text{D}}$ $\dim W$

(c) Sei V ein 6-dimensionaler Vektorraum. Für welche $0 \leq d \leq 4$ gibt es Unterräume U und U' von V mit $\dim U = \dim U' = 4$ und $\dim (U \cap U') = d$?

$\boxed{\text{A}}$ $0, 1, 2, 3, 4$

$\boxed{\text{B}}$ $0, 1, 2$

$\boxed{\text{C}}$ $2, 3, 4$

(d) Sei V ein Vektorraum.

A Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Teilmenge von V ist wieder linear unabhängig.

B Jede Teilmenge einer linear abhängigen Teilmenge von V ist wieder linear abhängig.

C Besitzt V ein unendliches Erzeugendensystem, so sind alle Basen von V unendlich.

(e) Sei V ein Vektorraum der Dimension n.

A Jede linear unabhängige Teilmenge $S \subseteq V$ hat mindestens n Elemente.

B Jede linear unabhängige Teilmenge $S \subseteq V$ hat genau n Elemente.

C Jede linear unabhängige Teilmenge $S \subseteq V$ hat höchstens n Elemente.

(f) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ bilden einen Unterraum?

A $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0 \right\}$

B $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\}$

****

Aufgabe 2

(2+2)

Sei $f\colon V \to V$ ein Automorphismus, und sei λ ein Eigenwert von f.

- Zeige, daß λ^{-1} ein Eigenwert von f^{-1} ist.
- Zeige, daß $V(\lambda, f) = V(\lambda^{-1}, f^{-1})$.

****

Aufgabe 3

(4)

Sei $f\colon \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^m$ eine Abbildung mit $f(v+w) = f(v) + f(w)$ für alle $v, w \in \mathbb{Q}^n$.

- Zeige, daß f eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist.

****

Aufgabe 4

(5+2+3)

Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ reeller Zahlen, und sei

$$f\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

die Abbildung, welche definiert ist durch $f((a_n)_{n\geq 1}) = (a_{n+1})_{n\geq 1}$. (Das heißt eine Folge $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ wird von f abgebildet auf die Folge $(a_2, a_3, a_4, \ldots)$.)

- Bestimme alle Eigenwerte von f.

- Beschreibe die zugehörigen Eigenräume (z.B. durch Angabe von Basen).

Nun sei

$$g\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

die Abbildung, welche definiert ist durch $g(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ für alle $(a_n)_{n\geq 1} = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- Bestimme alle Eigenwerte von g.

****

Aufgabe 5

(3+4)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4, \mathbb{R}).$$

- Berechne die Determinante und gegebenenfalls das Inverse der Matrizen A und B.

****

Aufgabe 6

(3+1+3+2)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Matrix in $\mathrm{M}(4, \mathbb{R})$.

- Berechne das charakteristische Polynom von A.
- Berechne die Eigenwerte von A in $\mathbb{R}$.
- Berechne Basen der Eigenräume von A.
- Ist A diagonalisierbar?

****

Aufgabe 7

(3+3+3)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Endomorphismus, welcher definiert ist durch

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ a \end{pmatrix}$$

für alle $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

- Bestimme die Koordinatenmatrix $\mathbf{c}_B^B(f)$ von f bezüglich der Basis
$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
von $\mathbb{R}^2$.
- Bestimme die Koordiantenmatrix $\mathbf{c}_C^C(f)$ von f bezüglich der Basis
$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
von $\mathbb{R}^2$.
- Konstruiere eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ (und auch S^{-1}) mit
$$S^{-1}\mathbf{c}_B^B(f)S = \mathbf{c}_C^C(f).$$

****

Insgesamt gibt es $7 + 4 + 4 + 10 + 7 + 9 + 9 = 50$ Punkte zu gewinnen bzw. zu verlieren.

VIEL ERFOLG!