Lineare Algebra 1, Klausur 21.2.2001 bei B. Lehmann
Version A (Mathematiker)

AUFGABE 1A

Sei $\mathfrak{V} := (v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^3$ mit $v_1 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und

$Fx := 4\,(x \cdot v_2)\, v_2$ für $x \in \mathbb{R}^3$.

1) Zeige:

a) $\mathfrak{V}$ ist eine positiv orientierte orthonormale Basis des $\mathbb{R}^3$.

b) $F \in End(V)$

2) Berechne:

a) $M^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{S}_3}(F)$

b) $M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(F)$

c) $rang\ F$, $Kern\ F$, $tr\ F$, $\det F$ und p_F

d) $T^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{S}_3}$, $T^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{V}}$ und $T^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{V}} M^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{S}_3}(F) T^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{S}_3}$

e) $F^2 - 4F$

LÖSUNG 1A

1) a) $v_1 \times v_2 = v_3$

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (v_1 \times v_2) \cdot v_3 = v_3 \cdot v_3 = 1 \Rightarrow \mathfrak{V}$ ist positiv orientierte Basis

$v_1 \cdot v_2 = 0$, $|v_1|^2 = |v_2|^2 = 1 \Rightarrow \mathfrak{V}$ ist Orthonormalbasis

b) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ✓ ; $F \in End(V)$, weil das Skalarprodukt auf der ersten Stelle linear ist.

2) a) $Fe_1 = 4 \cdot \frac{1}{3} v_2 = \frac{4}{3} v_2$, $Fe_2 = 4 \cdot \frac{-2}{3} v_2 = \frac{-8}{3} v_2$

$$Fe_3 = 4 \cdot \frac{-2}{3} v_2 = \frac{-8}{3} v_2 \Rightarrow M^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{S}_3}(F) = \frac{4}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $Fv_1 = 4\,(v_1 \cdot v_2)\, v_2 = \mathfrak{O}$, $Fv_2 = 4\,(v_2 \cdot v_2)\, v_2 = 4 v_2$, $Fv_3 = 4\,(v_3 \cdot v_2)\, v_2 = \mathfrak{O}$

$$\Rightarrow M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $\Rightarrow rang\ F = 1$, $Kern\ F = Span\,\{v_1, v_3\}$, $tr\ F = 4$, $\det F = 0$, $p_F(\lambda) = \lambda^2(4 - \lambda)$

d) $$T^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{S}_3} =_{\text{IV.6.1.1}} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{V}} =_{\text{IV.6.1.3}} \left(T^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{S}_3}\right)^{-1}$$

$$=_{\substack{\text{IV.3.6.2} \\ \text{1 a)}}} \begin{pmatrix} v_2 \times v_3 & v_3 \times v_1 & v_1 \times v_2 \end{pmatrix}^t =_{\text{I.5.15}} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$T^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{V}} M^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{S}_3}(F) T^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{S}_3} =_{\text{IV.6.1.1}} M^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{V}}(1_{\mathbb{R}^3})\, M^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{S}_3}(F)\, M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{S}_3}(1_{\mathbb{R}^3}) =_{\text{IV.2.4.1}} M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(F)$$

e) $F^2 x = 4\,(\{Fx\} \cdot v_2)\, v_2 = 4\,(\{4\,(x \cdot v_2)\, v_2\} \cdot v_2)\, v_2 = 16\,((x \cdot v_2)\,|v_2|^2)\, v_2 = 4Fx \Rightarrow F^2 - 4F = \mathfrak{O}$

oder: $M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(F^2 - 4F) = M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(F^2) - M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(4F) = M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(F)^2 - 4M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(F) = \mathfrak{O} \Rightarrow F^2 - 4F = \mathfrak{O}$

AUFGABE 2A

Durch $a_{n+1} = 2a_n + 5a_{n-1}$, $a_0 = a_1 = 1$, wird eine reelle Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ definiert.
Gib eine explizite Formel für a_n an.

LÖSUNG 2A (Vgl. IV.7.3.2)

$$y_n := \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} =: Ay_{n-1} \Rightarrow y_n = A^2 y_{n-2} = \dots = A^n y_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ 5x_1 + 2x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

$x_1 = 0 \Rightarrow x = \mathfrak{O}$

$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = \lambda\ ,\ \lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = B\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = B\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B^{-1}$$

$$= \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1{}^n & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_1{}^n & \lambda_2{}^n \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_1{}^n & \lambda_2{}^n \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} (\lambda_2-1)\lambda_1{}^n - (\lambda_1-1)\lambda_2{}^n \\ * \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_n = \tfrac{-\sqrt{6}(1+\sqrt{6})^n - \sqrt{6}(1-\sqrt{6})^n}{-2\sqrt{6}} = \tfrac{(1+\sqrt{6})^n + (1-\sqrt{6})^n}{2}$$

AUFGABE 3A

Betrachte $A := \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ als komplexe Matrix.

a) Berechne $\sigma(A)$, $\det A$, $rang\ A$, $p_A(\lambda)$ und A^3.

b) Ist A diagonalisierbar?

LÖSUNG 3A

a) $Ax = a \times x$ mit $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $p_A(\lambda) =_{\text{VI.1.4.3}} -\lambda\,(\lambda^2 + (a \cdot a)) = -\lambda\,(\lambda^2 + 30)$

$\Rightarrow \sigma(A) = \{0, i\sqrt{30}, -i\sqrt{30}\} \Rightarrow \det A = 0\ ,\ rang\ A = 2$

$\mathfrak{O} = p_A(A) =_{\text{VI.3.9}} -A^3 - (a \cdot a)\,A \Rightarrow A^3 = -30A$

b) A besitzt 3 verschiedene Eigenwerte, ist also diagonalisierbar nach IV.7.6 .

AUFGABE 4A

Berechne $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{vmatrix}$.

LÖSUNG 4A

$$b_1 := 2\ ,\ b_2 := 3\ ,\ b_3 := 5\ ,\ b_4 := 6 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{vmatrix} =_{\text{V.2.12.1}} \begin{cases} & (b_4-b_3)\cdot(b_4-b_2)\cdot(b_4-b_1) \\ \cdot & (b_3-b_2)\cdot(b_3-b_1) \\ \cdot & (b_2-b_1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} & 1\cdot 3\cdot 4 \\ \cdot & 2\cdot 3 \\ \cdot & 1 \end{cases} = 72$$

Lineare Algebra I [illegible] 21.2.[illegible] bei [illegible]

AUFGABE 1B

Sei $\mathfrak{V} := (v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^3$ mit $v_1 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$Fx := 5\,(x \cdot v_3)\, v_3$ für $x \in \mathbb{R}^3$.

1) Zeige:
   a) $\mathfrak{V}$ ist eine positiv orientierte orthonormale Basis des $\mathbb{R}^3$.
   b) $F \in End(V)$
2) Berechne:
   a) $M^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{S}_3}(F)$
   b) $M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(F)$
   c) $rang\ F$, $Kern\ F$, $tr\ F$, $\det F$ und p_F
   d) $T^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{S}_3}$, $T^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{V}}$ und $T^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{V}} M^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{S}_3}(F) T^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{S}_3}$
   e) $F^2 - 5F$

LÖSUNG 1B

1) a) $v_1 \times v_2 = v_3$

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (v_1 \times v_2) \cdot v_3 = v_3 \cdot v_3 = 1 \Rightarrow \mathfrak{V}$ ist positiv orientierte Basis

$v_1 \cdot v_2 = 0$, $|v_1|^2 = |v_2|^2 = 1 \Rightarrow \mathfrak{V}$ ist Orthonormalbasis

b) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ✓ ; $F \in End(V)$, weil das Skalarprodukt auf der ersten Stelle linear ist.

2) a) $Fe_1 = 5 \cdot \frac{-2}{3} v_3 = \frac{-10}{3} v_3$, $Fe_2 = 5 \cdot \frac{-2}{3} v_3 = \frac{-10}{3} v_3$

$$Fe_3 = 5 \cdot \tfrac{1}{3} v_3 = \tfrac{5}{3} v_3 \Rightarrow M^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{S}_3}(F) = \frac{5}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $Fv_1 = 5\,(v_1 \cdot v_3)\, v_3 = \mathfrak{O}$, $Fv_2 = 5\,(v_2 \cdot v_3)\, v_3 = \mathfrak{O}$, $Fv_3 = 5\,(v_3 \cdot v_3)\, v_3 = 5v_3$

$$\Rightarrow M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

c) $\Rightarrow rang\ F = 1$, $Kern\ F = Span\,\{v_1, v_2\}$, $tr\ F = 5$, $\det F = 0$, $p_F(\lambda) = \lambda^2(5 - \lambda)$

d) $T^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{S}_3} =_{\text{IV.6.1.1}} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{V}} =_{\text{IV.6.1.3}} \left(T^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{S}_3}\right)^{-1}$

$$=_{\substack{\text{IV.3.6.2} \\ \text{1 a)}}} \begin{pmatrix} v_2 \times v_3 & v_3 \times v_1 & v_1 \times v_2 \end{pmatrix}^t =_{\text{I.5.15}} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$T^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{V}} M^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{S}_3}(F) T^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{S}_3} =_{\text{IV.6.1.1}} M^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{V}}(1_{\mathbb{R}^3})\, M^{\mathfrak{S}_3}_{\mathfrak{S}_3}(F)\, M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{S}_3}(1_{\mathbb{R}^3}) =_{\text{IV.2.4.1}} M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(F)$

d) $F^2 x = 5\,(\{Fx\} \cdot v_3)\, v_3 = 5\,(\{5\,(x \cdot v_3)\, v_3\} \cdot v_3)\, v_3 = 25\,((x \cdot v_3)\, |v_3|^2)\, v_3 = 5Fx \Rightarrow F^2 - 5F = \mathfrak{O}$

oder: $M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(F^2 - 5F) = M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(F^2) - M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(5F) = M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(F)^2 - 5M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(F) = \mathfrak{O} \Rightarrow F^2 - 5F = \mathfrak{O}$

AUFGABE 2B

Durch $a_{n+1} = 2a_n + 6a_{n-1}$, $a_0 = a_1 = 1$, wird eine reelle Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ definiert.
Gib eine explizite Formel für a_n an.

LÖSUNG 2B (Vgl. IV.7.3.2)

$$y_n := \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = Ay_{n-1} \Rightarrow y_n = A^2 y_{n-2} = \ldots = A^n y_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x_2 = \lambda x_1 \\ 6x_1 + 2x_2 = \lambda x_2 \end{array} \right.$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x = \mathfrak{O}$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = \lambda \,,\ \lambda^2 - 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{7}$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = B\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = B\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B^{-1}$$

$$= \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1{}^n & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_1{}^n & \lambda_2{}^n \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_1{}^n & \lambda_2{}^n \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} (\lambda_2-1)\lambda_1{}^n - (\lambda_1-1)\lambda_2{}^n \\ * \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{-\sqrt{7}(1+\sqrt{7})^n - \sqrt{7}(1-\sqrt{7})^n}{-2\sqrt{7}} = \frac{(1+\sqrt{7})^n + (1-\sqrt{7})^n}{2}$$

AUFGABE 3B

Betrachte $A := \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ als komplexe Matrix.

a) Berechne $\sigma(A)$, $\det A$, $rang\ A$, $p_A(\lambda)$ und A^3.

b) Ist A diagonalisierbar?

LÖSUNG 3B

a) $Ax = a \times x$ mit $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $p_A(\lambda) =_{\text{VI.1.4.3}} -\lambda(\lambda^2 + (a\cdot a)) = -\lambda(\lambda^2+26)$

$\Rightarrow \sigma(A) = \{0, i\sqrt{26}, -i\sqrt{26}\} \Rightarrow \det A = 0$, $rang\ A = 2$

$\mathfrak{O} = p_A(A) =_{\text{VI.3.9}} -A^3 - (a\cdot a)\,A \Rightarrow A^3 = -26A$

b) A besitzt 3 verschiedene Eigenwerte, ist also diagonalisierbar nach IV.7.6 .

AUFGABE 4B

Berechne $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{vmatrix}$.

LÖSUNG 4B

$$b_1 := 2\,, b_2 := 4\,, b_3 := 5\,, b_4 := 6 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{vmatrix} =_{\text{V.2.12.1}} \left\{ \begin{array}{l} (b_4-b_3)\cdot(b_4-b_2)\cdot(b_4-b_1) \\ \cdot\ (b_3-b_2)\cdot(b_3-b_1) \\ \cdot\ (b_2-b_1) \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1\cdot 2\cdot 4 \\ \cdot\ 1\cdot 3 \\ \cdot\ 2 \end{array} \right. = 48$$