Klausur zur Linearen Algebra I am 7.2.98 , 9–12 Uhr

1 V sei ein $(n+1)$–dimensionaler K–Vektorraum , $\{v_1,\dots,v_n\} \subset V$ linear unabhängig, und $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

1) (1 P) $\{v_1,\dots,v_n,v\}$ ist Basis von V für geeignete $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$.

2) (1 P) $\{v_1,\dots,v_n,v,w\}$ ist Basis von V für geeignete $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$ und $w \in V$.

2 (1 P) V sei der reelle Vektorraum der auf $\mathbb{R}$ definierten reellwertigen Funktionen. Gibt es eine nichttriviale lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^{15} \longrightarrow V$?

3 V,W seien K–Vektorräume (nicht notwendig endlichdimensional) und $F \in \mathrm{Hom}(V,W)$.

1) (2 P) Nehmen wir an, daß $\dim F(U) = \dim U$ gilt für alle endlichdimensionalen $U \subset V$. Ist F dann surjektiv? Ist F dann injektiv?

2) (1 P) Welche Voraussetzungen an V,W garantieren: Wenn F surjektiv ist, dann auch injektiv.

4 V,W seien endlichdimensionale K–Vektorräume, $F \in \mathrm{Aut}(V)$, $G \in \mathrm{End}(V)$, $H \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Welche der folgenden Aussagen ist immer wahr?

1) (2 P) $F^2 - F$ ist genau dann invertierbar, wenn F nicht den Eigenwert 1 besitzt.

2) (1 P) Im Fall $\dim W = \dim V$ ist $H\,F$ invertierbar.

3) (1 P) Wenn $H\,F$ invertierbar ist, so auch $F\,H$.

4) (2 P) Ist $G^5 = F$, so ist G invertierbar.

5) (3 P) Durch $\Phi(G) := F\,G$ wird $\Phi \in \mathrm{End}(\mathrm{End}(V))$ definiert mit $\det \Phi \neq 0$.

5 Seien $A \in GL_8(\mathbb{R})$, $B \in M_8(\mathbb{R})$, V ein 8–dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Basen $\mathfrak{V},\mathfrak{W}$ und $F := L^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}}(A)$. Welche der folgenden Aussagen ist immer wahr?

1) (1 P) F ist injektiv.

2) (1 P) F ist surjektiv.

3) (1 P) $F^3 \in \mathrm{Aut}(V)$

4) (1 P) Das Gleichungssystem ${}^tA\,x = \mathfrak{O}$, $x \in \mathbb{R}^8$, ist lösbar mit einem Vektor $x \neq \mathfrak{O}$.

5) (1 P) $\det B = 0 \Rightarrow \det(A\,B) = 0$

6) (2 P) $\det B = 0 \Rightarrow \det(A - B) = \det A$

7) (1 P) $\det(-A) = \det A$

6 Sei $\dim V = n$ und $F \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent.

1) (1 P) Wie ist diese Eigenschaft von F definiert?

2) (1 P) Ist F invertierbar?

3) (2 P) Zeige $(1_V - F) \in \mathrm{Aut}(V)$ und bestimme $(1_V - F)^{-1}$. TIP $(1_V - F)(1_V + F + F^2 + \dots) = ?$

7 Zeige:

1) In m–dimensionalen K–Vektorräumen V gilt:

a) (2 P) Für $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,K)$, $\varphi \neq \mathfrak{O}$, ist $\dim \mathrm{Kern}\, \varphi = m-1$ (Kern φ ist eine Hyperebene).

b) (3 P) Ist $U \subset V$ eine Hyperebene, so gibt es $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,K)$ mit $U = \mathrm{Kern}\, \varphi$.

2) a) (2 P) Ist $n \in K^m$, $n \neq \mathfrak{O}$, so definiert die Gleichung $n \cdot x = 0$ eine Hyperebene in K^m.

b) (3 P) Jede Hyperebene U in K^m wird durch eine Gleichung der Form $n \cdot x = 0$ beschrieben, wobei $n \in K^m$, $n \neq \mathfrak{O}$.

3) (3 P) Ist $n \in K^m$, $n \cdot n \neq 0$, N der von n aufgespannte Unterraum und $E := \{ x \in K^m \mid n \cdot x = 0 \}$, so gilt $K^m = N \oplus E$.

8 1) (2 P) Warum kann $N := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$ zu einer Basis von $M_2(\mathbb{C})$ ergänzt werden?

2) (5 P) Bestimme alle Matrizen, die N zu einer Basis von $M_2(\mathbb{C})$ ergänzen.

9 Seien $A,B \in M_n(K)$.

1) (1 P) Wenn in K ein $\lambda \neq 0$ existiert mit $A\,B = \lambda\, E_n$, gilt dann auch $B\,A = \lambda\, E_n$?

2) (1 P) Wenn $A\,B = \mathfrak{O}$ und $A \in GL_n(K)$, gilt dann auch $B\,A = \mathfrak{O}$?

3) (2 P) Wenn $A\,B = \mathfrak{O}$, gilt dann auch $B\,A = \mathfrak{O}$?

4) Was folgt für $\det A$, wenn

a) (2 P) mehr als $n^2 - n$ Elemente von A Null sind?

b) (1 P) $n^2 - n$ Elemente von A Null sind?

c) (1 P) $A \neq \mathfrak{O}$, $B \neq \mathfrak{O}$ und $A\,B = \mathfrak{O}$?

10 $A := \begin{bmatrix} 0 & & & * \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \in M_n(K)$, $A \neq \mathfrak{O}$.

1) (1 P) Berechne A^n.

2) (3 P) Warum kann A nicht diagonalisierbar sein? TIP Was wäre, wenn ....

3) (1 P) Bestimme alle $x \in K^n$ mit $A\,x = x$.

11 (1 P) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = ?$

12 Für $\mathfrak{V} = \{a_1,a_2,a_3\} \subset \mathbb{R}^3$ gelte $a_i \cdot a_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$.

Außerdem sei $A := \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ und $F(x) := a_3 \times (a_1 \times x) + a_3 \times (a_2 \times x)$ für $x \in \mathbb{R}^3$.

1) (3 P) Warum ist $\mathfrak{V}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Warum ist $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$?

2) (8 P) Berechne: $|a_1 + a_2|$, A^{-1}, $\operatorname{rang} F$, $\det F$, $M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(F)$, $\operatorname{tr} F$

3) (2 P) $x \cdot y - \sum_{j=1}^{3} (a_j \cdot x)(a_j \cdot y) \overset{?}{=} \ldots\ldots$ für $x,y \in \mathbb{R}^3$

13 (3 P) $\mathfrak{V} = \{v_1,\ldots,v_n\}$ sei Basis von K^n und es gelte $v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$.

Zeige $\operatorname{tr} F = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot (F\, v_j)$ für alle $F \in \mathrm{End}(V)$.

14 (4 P) Seien $A \in M(m,n;K)$, $B,C \in M(n,m;K)$, $A\,B = E_m$, $C\,A = E_n$. Was folgt daraus?

15 $x_1 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

1) (3 P) Wieviele $A \in M_3(\mathbb{R})$ gibt es mit $A x_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ für $j=1,2,3$?

2) (2 P) Bestimme rang A .

3) (2 P) Berechne A .

16 (6 P) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn a ....

17 (5 P) Sei $a \neq 0$, $A := \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Berechne B , so daß $A = B \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B^{-1}$.

18 (5 P) $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ seien orthogonale Einheitsvektoren,

$A := \begin{bmatrix} 2a_1 & 3b_1 & (a_2b_3-a_3b_2) \\ 2a_2 & 3b_2 & (a_3b_1-a_1b_3) \\ 2a_3 & 3b_3 & (a_1b_2-a_2b_1) \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Berechne $\det A$ und A^{-1} .

19 $A := \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix} \in M_8(\mathbb{R})$

1) (9 P) Berechne $\det A$, A^2 , A^{-1} und $\sigma(A)$.

2) (8 P) Zeige, daß A diagonalisierbar ist und bestimme B , B^{-1} und eine Diagonalmatrix D , so daß $A = B D B^{-1}$.

TIP für B^{-1}: $B^2 = ...$

20 Welche der folgenden Mengen von Matrizen bildet eine Gruppe (mit der Matrizenmultiplikation als Gruppenoperation)?

1) (1 P) $M_1 := \{ A \in M_n(K) \mid \det A = 0 \}$

2) (1 P) $M_2 := \{ A \in M_n(K) \mid \det A = 1 \}$

3) (2 P) $M_3 := \{ A \in M_n(K) \mid \det(A^4) = 1 \}$

21 (7 P) Gegeben sind 3 Vektoren des $\mathbb{R}^4$: $a_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $a_2 := \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $b := \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Bestimme den Abstand d von b zu $U := \mathrm{Span}\{a_1, a_2\}$, also
$d = \inf \{ \, |b - (x_1 a_1 + x_2 a_2)| \mid x_{1,2} \in \mathbb{R} \}$.

TIP Gaußsche Normalgleichungen