Klausur Lineare Algebra II, SS 2006

****

Aufgabe 1 (9 mal 1)

Definiere die folgenden Begriffe:

(a) Orthogonale Matrix in $M(n, \mathbb{R})$,
(b) Hermitesche Matrix in $M(n, \mathbb{C})$,
(c) Unitäre Matrix in $M(n, \mathbb{C})$,
(d) Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum,
(e) Euklidscher Vektorraum,
(f) Selbstadjungierter Endomorphismus eines euklidschen Vektorraumes.

Gib jeweils eine Basis der folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume an:

(g) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$,
(h) $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$,
(i) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

****

Aufgabe 2 (2+3)

(a) Sei B die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$, und sei $s\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, welche definiert ist durch

$$s\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = 4x_1y_1 + 6x_1y_3 - 2x_2y_3 + 6x_3y_1 - 2x_3y_2 + 8x_3y_3.$$

Bestimme die Koordinatenmatrix $\mathbf{c}_B(s)$ von s bezüglich B.

(b) Konstruiere eine Basis C von $\mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{c}_C(s)$ ist eine Diagonalmatrix.

****

Aufgabe 3 (3+3)

a) Sei A eine symmetrische Matrix in $M(n, \mathbb{R})$. Wie ist die Signatur (r^+, r^-, r^0) von A definiert?

(b) Sei A eine symmetrische Matrix in $M(2, \mathbb{R})$ mit $\det(A) < 0$. Bestimme die Signatur von A. Mit kurzer Begründung.

****

Aufgabe 4 (4)

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Klassifiziere alle Matrizen in der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, welche obere Dreiecksmatrizen sind. Mit kurzer Begründung.

****

Aufgabe 5 (3+3+3)

(a) Sei A eine Matrix in $M(n, \mathbb{R})$, welche symmetrisch und nilpotent ist. Zeige: Es gilt $A = 0$.

(b) Finde eine Matrix A in $M(2,\mathbb{C})$, welche symmetrisch und nilpotent ist und für die $A \neq 0$ gilt.

(c) Sei V ein euklidscher Vektorraum und seien f und g selbstadjungierte Endomorphismen von V. Zeige: Gilt $(f-g)^m = 0$ für ein $m \geq 1$, so folgt $f = g$.

****

Aufgabe 6 (2+3+3)

(a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Matrix in $M(3,\mathbb{R})$.

- Bestimme die Jordan-Normalform von A. Mit kurzer Begründung.
- Finde eine invertierbare Matrix S, so daß $S^{-1}AS$ eine Matrix in Jordan-Normalform ist.

(b) Sei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Matrix in $M(4,\mathbb{C})$. Bestimme die Jordan-Normalform von B. Mit kurzer Begründung. Hinweis: 0 ist der einzige Eigenwert von B.

****

Insgesamt gibt es $9+5+6+4+9+8 = 41$ Punkte zu gewinnen.

VIEL ERFOLG!