Nachklausur: 18.7.

universitätbonn

# Praktische Mathematik II

Sommersemester 2006
Prof. Dr. M. Griebel

## Aufgabenblatt 8

Abgabe der Lösungen: 13.06. in der Vorlesung
Abgabe der Programmieraufgaben: 12.06.-16.06. im CIP-Pool

**Aufgabe 1** (Gauß-Lobatto Quadratur):

a) Für festes $\alpha, \beta > -1$ betrachten wir auf $C([-1,1])$ die Bilinearform

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\, dx.$$

Man zeige, dass die Jacobi-Polynome $P_n^{(\alpha,\beta)}$,

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}],$$

orthogonal bezüglich der obigen Bilinearform sind.

b) Wir betrachten nun die numerische Integration auf dem Intervall $[-1,1]$. Man bestimme $2n$ Freiheitsgrade $\omega_0, \ldots, \omega_n$ und $x_1, \ldots, x_{n-1}$, so dass die Quadraturformel

$$Q_n(f) = \omega_0 f(-1) + \omega_n f(1) + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i f(x_i)$$

zu dem Polynomraum $\Pi_{2n-1}$ (d.h. alle Polynome vom Grad maximal $2n-1$) interpolatorisch ist.

c) Bestimmen Sie die Stützstellen und die Gewichte explizit für $n = 3$.

10 Punkte

**Aufgabe 2** (Mehrdimensionale Quadratur): Wie betrachten nun iterierte Integrale der Form

$$I(f) = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\, dy\, dx.$$

Hier hängen also die inneren Integrationsgrenzen $c$ und $d$ von der äußeren Koordinate $x$ ab.

a) Geben Sie die Produkt–Trapezregel zur Berechnung dieser Integrale an.

b) Berechnen Sie $\pi$ näherungsweise mit der Produkt–Trapezregel und der Produkt–Simpsonregel durch Integration über den Viertelkreis.

$$\pi \approx 4 \int_{\underset{a}{0}}^{\overset{b}{1}} \int_{\underset{c(x)}{0}}^{\overset{d(x)}{\sqrt{1-x^2}}} 1\, dy\, dx .$$

6 Punkte

**Aufgabe 3** (Monte–Carlo): Ein Monte–Carlo Verfahren mit $N$ Punkten liefert für ein mehrdimensionales Integrationsproblem mit Dimension $d$

$$I(f) = \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

wobei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ die folgenden Resultate:

| $N$ | 100 | 1000 | 10000 | 100000 |
|---|---|---|---|---|
| $I$ | 15.78543 | 15.71406 | 15.69174 | 15.68612 |

a) Wie groß ist wohl jeweils der Integrationsfehler? $|I(f) - Q(f)| \approx c N^{-\frac{1}{2}}$

b) Wie viele Funktionsauswertungen sind wohl notwendig, um das Integral auf 5 Stellen genau zu berechnen?

c) Angenommen, obige Ergebnisse wurden nicht durch ein Monte–Carlo Verfahren sonden durch die Produkt–Trapezregel ermittelt. Wie groß ist die Dimension $d$?

d) Die Funktion $f(\mathbf{x})$ sei jetzt zwar stetig, aber nicht differenzierbar (sie habe z.B. einen Knick). Welches der besprochenen numerischen Integrationsverfahren würden Sie verwenden, wenn die Dimension $d = 100$ ist?

6 Punkte

**Aufgabe 4** (Programmieraufgabe): Schreiben Sie folgende Programme:

a) Ein Verfahren zur Berechnung des Integrals einer gegebenen eindimensionalen Funktion im Intervall $[a, b]$ mit Hilfe der Simpsonsumme mit Maschenweite $(b-a)/n$. Die zu integrierende Funktion sei dabei als eine separate Unterroutine gegeben.

b) Das adaptive Verfahren mit dem auf dem Übungsblatt 7 in Aufgabe 4 behandelten Verfeinerungskriterium mit Fehlertoleranz $\varepsilon$.

Betrachten Sie die drei Integrale

$$\begin{aligned} I_1(f) &= \int_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\, dx, \\ I_2(f) &= \int_{0}^{\pi} x^2 \sin(x)\, dx, \\ I_3(f) &= \int_{1}^{3} \exp(3x)\, dx. \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie $I_1$, $I_2$ und $I_3$ numerisch mit dem Programm aus Aufgabenteil a) für $n = 1, 2, 4, 8, 16$. Geben Sie jeweils die Zahl der Funktionsauswertungen, den berechneten Integralwert und den Integrationsfehler aus.

d) Berechnen Sie $I_1$, $I_2$ und $I_3$ numerisch mit dem adaptiven Verfahren aus Aufgabenteil b) für $\varepsilon = 0.1, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$. Geben Sie jeweils die Zahl der Funktionsauswertungen, den berechneten Integralwert, den geschätzten und den exakten Integrationsfehler aus.

e) Plotten Sie die Anzahl benötigter Funktionsauswertungen gegen den Integrationsfehler in drei Plots (für $I_1$, $I_2$ und $I_3$). Verwenden Sie eine doppelt logarithmische Skala.

15 Punkte