Vordiplomsprüfung Analysis I-IV bei Prof. Frehse am 02.08.07

Allgemeines: Herr Frehse erreicht durch seine bekannt nette Art eine sehr angenehme Atmosphäre. Er möchte anscheinend vor allem schnelle Antworten auf Fragen, die eher auf allgemeine Zusammenhänge zwischen verschiedenen Themengebieten abzielen. Er erläutert nach den Antworten einiges vor allem Funktionalanalytisches, was ich hier ausgelassen habe.

- Was wissen Sie zu offenen Abbildungen?
    - Holomorphe Funktionen sind offen, falls nicht konstant aufgrund des Offenheitssatzes.
    - f: R^n → R^n ist offen, falls Df in jedem Punkt invertierbar, denn dann existiert wegen des Umkehrsatzes eine differenzierbare Umkehrabbildung, deren Urbilder von offener Mengen offen und gleichzeitig die Bilder offener Mengen von f sind.
- Was ist der Unterschied bei der Vollständigkeit der Hardyschen Funktionenräume und der L^p-Räume?
    - Def. L^p
    - Def. Hardyscher Funktionenraum (Holomorphe Funktion f aufgefasst als |f| von R^2 → R) mit Lp-Norm versehen
    - Bei Hardy bleibt aufgrund des Satzes von Montel die Holomorphie erhalten, wobei in Lp C-unendlich Funktionen gegen eine nur messbare und nicht diffbare Funktion konvergieren können
    - Satz von Montel
- Problem: $\int \frac{(\nabla u)^2}{2} - fu\, dx$ = min! Herr Frehse erzählt etwas über Variationsrechung und wie man umständlich einen Umweg über die reellen Funktionen machen müsse. Er fragt sich, sagt er, ob man nicht direkt das Problem mit holomorphen Funktionen lösen könne, oder zumindest stückweise.
    - Es ist unklar, worauf er hinaus möchte, vor allem ist nicht klar, welche Voraussetzungen an f und u gestellt sein sollen, f holomorph? f: R^n→ R?
- Es stellt sich heraus, dass Herr Frehse über Variationsformulierung $0 = \left\langle \nabla u - f, g \right\rangle = \int (\nabla u - f) g\, dx \quad \forall g \in ?$ darauf hinausmöchte, dass man das Fundamentallemma der Variationsrechung bei holomorphen Funktionen g nicht anwenden kann. Man kann g nämlich nicht lokal gleich null wählen, da dann g aufgrund des Identitätssatzes direkt im ganzen Gebiet gleich null ist.
- Was ist eine Riemannsche Fläche?
    - Eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit M, auf der eine holomorphen Funktion f:M→C existiert
- Kennen Sie ein Beispiel und wie man es konstruiert, also rein praktisch?
    - Beispiel von T. Buch aus Vorlesung: CxZ ohne 0: Man schneidet C an der negativen reellen Achse auf, und verklebt dort die „Ebenen“ aneinander. Dann definiert man den Logarithmus auf CxZ. Das funktioniert, weil dort, wo die Klebestelle ist, der Logarithmus auch um 2πi springt.
- Lebesgue-Integrierbarkeit der Ableitung einer Funktion:
    - Falls die Ableitung beschränkt oder durch intbares g majorisiert ist wegen Satz von Lebesgue.