Vordiplomsprüfung Mathematik (für Physiker, L.A. 1-2, Ana 1-3) bei Frehse

Themen:

- Skalarprodukte
- Cauchy-Schwarz
- Caley – Hamilton
- Potenzreihen: Beispiele, Ableitung, Konvergenzradius
- Ein Integral lösen
- Schwarzraum
- Integral 0 bis f(x) von g(x)

Verlauf:

F: Wie kann man Skalarprodukte schreiben? Wie kann man die schön darstellen?
M: Meinen Sie die Syntax....mit eckigen Klammern...<x,y>?
F: Ne, ich meine...da gibt es doch was mit Matrizen?
M: ${}^{T}xAy$
F: Und was ist das besondere an einem Skalarprodukt?
M: symmetrische, positiv definite Billenearform... [Achtung, eigentlich nicht allgemein gültig, kann auch nur hermitesch sein]

F: Kennen Sie denn vielleicht noch die Cauchy-Schwarzsche Ungleich
M: $<v,w>^2 <= <v,v><w,w>$
F: Und haben Sie ne Idee wie man das beweisen kann?
M: Ansatz: Für alle a,b in R gilt: $<av+bw,av+bw> >= 0$
[auflösen, a = <w,w> setzen und dadurch dividieren,b = <v,v,> und dividieren]

F: Ok das genügt dann, kann ich mir denken. Gut, nächsten Thema:
Dann gibt es ja in der linearen Algebra noch den Satz von Caley-Hamilton...wissen Sie auf Anhieb, was der aussagt?
M: hmmm.....[es dämmerte gerade]
F: Dass das char...
M: Wenn man die Matrix in ihr eigenes charakteristisches Polynom einsetzt kommt 0 raus.
F: Und wie beweist man den? Da gibt's nen schönen eleganten Beweis.
M: Sie meinen doch wohl hoffentlich diesen Scheinbeweis (det (A*E-A) = 0)
F: Zeigen Sie es mal nur für ne Diagonalmatrix...wie sieht die aus.
M: [Ich schreibe eine Diagonalmatrix und ihr charakteristisches Polynom hin]
F: Gut. Wie berechnen Sie denn Potenzen von diagonalisierbaren Matrizen?
M: $D = S^{-1}AS \Rightarrow A^n = SDS^{-1}SD.....S^{-1}$ (Innere S heben sich weg)

[Das Telefon klingelt, ich versuche angestrengt, die Zeit sinnvoll zu nutzen]

M: Jetzt haben wir also zu berechnen (A -) (A -) u berechnen
F: Ok das reicht, so geht's
M: [irritiert und ungläubig dass es schon fertig ist] hmm...nagut.

F: Nun zur Analysis...Potenzreihen. Können Sie vielleicht was historisches darüber erzählen?
M: Was historisches? Hmmm...
F: Also (?) und (?) dachten früher, man könnte jede Funktion so darstellen...und heute nennt man...
M: ...[damit ich auch noch was loswerden kann schießt es aus mir raus] Analytische Funktionen!
...Sind diejenigen, die man als Potenzreihe darstellen kann [Achtung: „Lokal“]

F: Hmmm...was kennen Sie denn für Reihen

M: Viele...Exponentialreihe, Sinusreihe
F: Ja, können Sie die Sinusreihe explizit angeben? Viele Physiker können das gar nicht!
M: Klar... [schreibt sie hin]
F: Und den Logarithmus?
M: Ne, weiß ich nicht mehr... [Hier tappte ich lange im Dunkeln nach dem Trial-and-Error-Verfahren, bis nach etlichen Korrekturen und Tipps das Ergebnis da stand]

F: Und wenn se so ne Reihe haben....was können sie damit mach...z.b.
M: Ableiten z.B.
F: Ja, und wie?
M: Also wenn die Folge der Partialsummen der gleidweise abgeleiteten Funktion gleichmäßig konvergiert, dann ist diese Grenzfunktion die Ableitung....blabla [war noch ein bisschen ausführlihcher, mit Benutzung von Papier und Stift]

F: Was ist denn der Konvergenzradius
M: [erklärt es ihm]
F: Und was dürfen Sie innerhalb des Konvergenzradius
M [halb geraten]: Gliedweise differenzieren
F: Gut. Jetzt mal ein Integral....[Integral über $1/(x^2+x+1)$
M: [Ich löse es durch Quadratische Ergänzung (im Nenner natürlich), 2 Mal Subsitutieren, also Skalierung und Verschiebung, bis es die Form $1/(y^2+1)$ hat, dann Arcus-Tangens]
F: Schön. Dann gibt es ja, besonders für Physiker interessant, den Raum S.
M: S? Was ist das?
F: [Erzählt, dass der Schwarzsche Raum invariant und Fouriertransformation ist, was besonders schön für die Physiker ist]

F: Jetzt vielleicht mal Funktionentheorie, Analysis 4, haben Sie das?
M: Eigentlich ist für die Prüfung nur Ana 1-3 vorgesehen, aber ich habe auch Ana 4 gehört.
F: Ok, das ist schwer....gucken Sie sich mal dieses Integral an (Integral über g(x) mit den Grenzen 0 bis f(x)) [Was mich erstmal irritiert hat, natürlich nimmt man dann einmal x~]
Wenn f ung g in C^n sind, wie kann man dann prüfen, ob dieses Integral in C^n ist?
M: [Hier wusste ich auch nicht viel. Man kann es wohl mit Kettenregel zeigen, wobei das Integral bis x einfach die Stammfunktion von g ist, und da setzt man dann f(x) ein.Der Rest war (ihm zumindest) klar* und er schickte mich raus]

F: Ok dann gehen se mal raus...wenn wir uns nicht einig sind befragen wie sie noch weiter.

Etwas ungläubig nahm ich die Note 1.0 entgegen.

*Im Nachhinein ist mir es auch vollkommen klar:
Sei G die Stammfunktion von g. Dann ist das Integral also nicht anderes als G°f.
G ist sogar n+1 mal stetig differenzierbar, und f n mal, also ist die Hintereinanderschaltung in C^n.