Prüfungsprotokoll

Fach:	Lineare Algebra / Algebra
Prüfer:	Herr Prof. Dr. Jens Franke
Prüfling:	Hanno Becker
Datum:	August 2007
Note:	1.0

Zu Beginn der Prüfung überließ Herr Franke mir die Entscheidung darüber, ob mit Linearer Algebra oder Algebra begonnen werden sollte. Ich entschied mich, mit LA zu beginnen, in der Hoffnung, möglichst schnell auf Algebra überwechseln zu können. Wie zuvor schon von Kommilitonen angekündigt, schrieb Herr Franke daraufhin wortlos die 3x3-Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$ auf und fragte nach ihrem Rang. Es war eine (echte) **Vandermonde-Matrix**, insbesondere also invertierbar und daher von vollem Rang. Ich bewies in diesem Zusammenhang die Determinantenformel

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i).$$

Anschließend bemerkte er die Symmetrie von A und fragte nach einem Kriterium, mit dem man symmetrische Matrizen auf positive Definitheit testen könne. Ich stockte und wusste lediglich zu antworten, dass eine symmetrische und insbesondere diagonalisierbare Matrix genau dann pos. def. ist, wenn ihre Eigenwerte sämtlich positiv sind. Das hatte Franke nicht hören wollen und sprach konkret auf ein Kriterium an, das die Determinanten $k \times k$-Teilmatrizen $A_k := (a_{ij})_{1 \le i,j \le k}$ verwendete. Ich formulierte dieses **Hauptminoren-Kriterium**, an das ich mich dunkel erinnert hatte, aus und Franke stellte es mir frei, einen Beweis dafür oder für den **Sylvesterschen Trägheitssatz** zu erbringen. Ich bewies letzteren, wobei mich Franke ausreden ließ und mich nicht unterbrach – allerdings ging der Beweis auch recht schnell, da ich ihn nur skizziert und nicht in allen Details ausführte. Franke schien dies in Ordnung zu finden – ich hielt es im Rest der Prüfung ebenso und wurde kaum unterbrochen.

Als Nächstes ging Franke zur **Jordan-Normalform** eines Endomorphismus $\varphi : V \to V$, V endl.-dim. über einem alg. abg. Körper, über und fragte für nicht-diagonalisierbares φ nach dem Analogon zur für diagonalisierbare Endomorphismen existente Zerlegung in Eigenräume $V = \bigoplus_{\lambda \in K} \mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)$. Damit waren die **verallgemeinerten Eigenräume**

$$\widetilde{\mathrm{Eig}}_\lambda(\varphi) := \bigcup_{k=1}^{\infty} \ker(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^k$$

gemeint – ihre Nennung sowie der Hinweis auf die allgemeingültige Zerlegung

$$V = \bigoplus_{\lambda \in K} \widetilde{\mathrm{Eig}}_\lambda(\varphi)$$

reichten ihm.

Anschließend fragte Herr Franke nach dem Inhalt unserer Algebra-I-Vorlesung. Als ich auch die Modultheorie genannt hatte, fragte Franke nach dem Zusammenhang zwischen dem **Klassifikationssatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen** und der Jordan-Normalform. Ich bewies im daraufhin mit eben diesem Klassifikationssatz angewandt auf den $K[X]$-Modul (V, φ) die Existenz der Jordan-Normalform von φ. Nun ging Franke zur Galoistheorie über und wollte wissen, ob ein **reguläres 9-Eck** konstruierbar sei. Ich erzählte, dass dies nicht möglich sei, da ansonsten die 9. Einheitswurzel in einer Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$ von Zweierpotenz-Ordnung enthalten sein müsste, was aber nicht möglich wäre, da jede solche Erweiterung den Zerfällungskörper von $X^9 - 1$ enthalten müsse, dieser aber die Galoisgruppe $G := (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$ mit $|G| = \varphi(9) = 6$ besäße.

Weiter erzählte er, dass mit großer Wahrscheinlichkeit die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers eines Polynomes 4. Grades die S_4 sei und fragte daraufhin, was man also zur Konstruierbarkeit der Nullstellen dieser Polynome sagen könne. Ich war etwas verwirrt und erklärte zunächst, dass diese Nullstellen konstruierbar seien, da S_4 auflösbar ist; er wies mich freundlich darauf hin, dass es ihm um Konstruierbarkeit, nicht durch Auflösbarkeit durch Radikale ginge, woraufhin ich mich wieder berappelte und die anscheinend richtige Antwort gab, nämlich, dass die Nullstellen in diesem Falle nicht konstruierbar seien, da $|S_4|$ keine Zweierpotenz ist.

Zum Abschluss der Prüfung sollte ich dann entweder beweisen, dass eine Erweiterung $L/\mathbb{Q}$ genau dann konstruierbar ist, wenn sie in einer **Galoiserweiterung von Zweierpotenzgrad** enthalten ist, oder aber die zuvor verwendete Tatsache $\mathbf{Gal}(X^n - 1) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Da ich den wunderschönen und trickreichen Beweis zu letzterem Satz kurz zuvor noch angeschaut hatte, bewies ich ihn. Nun waren ungefähr 23-24 Minuten vergangen und Herr Franke fragte, ob ich etwas dagegen hätte, die Prüfung bereits zu beenden. Da es gut gelaufen war, verneinte ich und die Prüfung war vorbei.

Ich habe die Prüfung als sehr angenehm empfunden, weil Herr Franke zugehört und mich während der Beweise kaum unterbrochen hat. Weiterhin hat er klare Fragen gestellt. Der Schwierigkeitsgrad hat mich etwas überrascht – ich hatte nicht damit gerechnet, dass Herr Franke neben den einfachen Fragen auch wirklich knifflige Beweise wie den von $\mathrm{Gal}(X^n - 1) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ abfragen würde – ich hatte mir diesen nur aus Interesse, nicht aber in der Erwartung angesehen, seine Kenntnis könne für die Prüfung relevant sein. Weiterhin ist es sehr sehr angenehm, stets zwei Sätze genannt zu bekommen, von denen immer nur einer bewiesen werden muss. So kann man die Prüfung selbst etwas lenken und gerät weniger in Situationen, in denen man überhaupt nicht mehr weiter weiß.