Prfungsprotokoll Lineare Algebra und Algebra, Prof. J. Schröer

1 Galois-Theorie

Wie ist die Galois Gruppe einer Körpererweiterung definiert?
Die Galois Gruppe ist die Automorphismengruppe einer Körpererweiterung.
Welche Ordnung hat die Galoisgruppe von $x^4 - 2$?
Dazu betrachten wir die Nullstellen. Diese lauten $\pm\sqrt[4]{2}$ und $\pm i\sqrt[4]{2}$.
Da das Minimalpolynom der ersten Nullstelle vom Grad 4 über $\mathbb{Q}$ ist notieren wir 4. Dazu kommt nun noch die Nullstelle i, diese hat über $\mathbb{Q}$ wie über $\mathbb{R}$ die Ordnung 2, also hat die Galoisgruppe insgesamt die Ordnung 8 (Sie enspricht der Diedergruppe D_4).
Wie kommt man auf die Ordnung der Galoisgruppe?
Diese ist zunächsteinmal definiert als Grad des Miniamlpolynoms und multiplikativ.
Warum ist sie Multiplikativ?
Dazu betrachten wir $L|M$ mit $(x_1, ..., x_n)$ einer Basis und $M|K$ mit Basis $(y_1, ..., y_m)$. Dann ist $(x_i y_j)_{i,j}$ Basis von $L|K$.
Ist die betrachtete Körpererweiterung Galoisch?
Ja, weil sie Zerfällungskörper eines Polynoms, also normal, und separabel, das Polynom 4 verschiende Nullstellen hat, ist.
Wann ist eine Körpererweiterung Galoisch?
Wenn sie separabel und normal ist, wenn es also $[L : K]$ viele K-Automorphismen gibt.
Beispiel für eine nicht-galoische Erweiterung?
$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbb{Q}$ ist nicht normal, da das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ $x^3 - 2$ ist und dieses 2 komplexe Nullstellen hat die nicht in der Beispielerweiterung liegen. Daher gibt es nur einen K-Automorphismus, der Normal ist, die Identität.
Was sagt der Hauptsatz der Galoistheorie?
Die Untergruppen der Galoisgruppe von $L|K$ stehen in Bijektion zu den Unterkörpern von L die K enthalten.
Wie sehen die Abbildungen aus?

$$K \subset M \subset L \mapsto \mathrm{Gal}(L|M) \subset \mathrm{Gal}(L|K)$$

Da jeder M-Automorphismus auch K-Automorphismus ist. Die Umkehrabbildung lautet:

$$H \subset \mathrm{Gal}(L|K) \mapsto L^H$$

Wobei L^H der Fixkörper von H in L ist, also der Körper aller Elemente $x \in K$ mit $g(x) = x \; \forall \; g \in H$
Beispiel fr eine nicht-kommutative Galoisgruppe?
Siehe oben, die D_4 oder auch der Zerfällungskörper von $x^3 - 2$, dessen Galoisgruppe ist die $\mathcal{S}_3$, die auch nicht-kommutativ ist. Da zudem jede Galoisgruppe Untergruppe einer symmetrischen Gruppe ist finden wir leicht eine nicht kommutative Galoisgruppe, da die $\mathcal{S}_n$ für $n > 2$ nicht mehr kommutativ ist.

2 Diagonalisierbare Endomorphismen

$f \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt diagonlisierbar $\Leftrightarrow \exists$ Basis B von V so daß

$$C_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

$\lambda \in K$ heißï¿$\frac{1}{2}$ Eigenwert von $f \Leftrightarrow \exists v \neq 0 \in V$ mit $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{id}_V) = 0$
Was bedeutet $C_B^B(f)$?
Für eine Lineare Abbildung f gilt nach Definition $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$. Da jeder Vektor $v \in V$ endliche Linearkombination von Basisvektoren ist reicht es also die Koordinaten von a_{ij} in $f(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_j$ fr alle j zu bestimmen und in einer Matrix aufzuschreiben.
Basiswechsel können wir durchführen wie folgt: Seien B, B' Basen von V, dann gilt

$$C_B^{B'}(\mathrm{id}_V) v_{B'} = v_B \quad \text{und} \quad C_{B'}^B(\mathrm{id}_V) v_B = v_{B'}$$

Daraus folgt:

$$C_{B'}^B(\mathrm{id}_V) C_B^B(f) C_B^{B'}(\mathrm{id}_V) = C_{B'}^{B'}(f)$$

Wie man ebenfalls leicht sieht gilt:

$$C_B^{B'}(\mathrm{id}_V) = (C_{B'}^B(\mathrm{id}_V))^{-1}$$

Dann ist f diagonalisierbar falls

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(V(\lambda_i, f)) = \dim(V)$$

Wie kommt man an die Eigenwerte?
Dazu bestimmt man das Charakteristische Polynom. Dieses ist definiert durch

$$\chi_f(X) := \det(XE - f)$$

Wobei wir f mit seiner Koordinatenmatrix bezüglich einer beliebigen aber fixierten Basis betrachten.
Dies ist wohldefiniert, denn aus dem Determinanten Multiplikationssatz folgt:

$$\det(XE - f) = \det(SS^{-1}) \det(XE - f) = \det(S) \det(XE - f) \det(S^{-1}) =$$

$$\det(S(XE - f)S^{-1}) = \det(XE - SfS^{-1}) \ \forall \ S \in \mathrm{GL}(n, K)$$

3 Bilinearformen

Sei $\beta : V \times W \to K$ eine Bilinearform, sei $U \subset V$ ein Unterraum. Bestimme $U^{\perp}$.

$$U^{\perp} = \{u \in W \mid \beta(v, u) = 0 \ \forall \ v \in U\}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} : \ K^2 \times K^3 \to K, \ U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Wir müssen also lösen:

$$(1 \ 3 \ 7) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0$$

Dies definiert das 2-dimensionale orthogonale Komplement zu U in K^3.

3.1 Spektralsatz für euklidsche Vektorräume

$\forall \ f \in \mathrm{End}_K(V), \ f$ selbstadjungiert $\exists$ ONB B von V s.d.

$$C_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

$f \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt selbstadjungiert $\Leftrightarrow \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \ \forall \ v, w \in V$ Eine Basis B eines euklidschen Vektorraums V heiß ONB $\Leftrightarrow \forall b_i, b_j \in B$:

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Nenne eine Möglichkeit eine ONB zu konstruieren und Erkläre die Vorgehensweise.
Beim Gram-Schmittschen Orthogonalisierungsverfahren wird zuerst der Erste Vektor der Basis auf die Länge 1 gebracht. Danach zieht man die Anteile im Skalarprodukt des Ersten vom 2. Basisvektor ab und bringt diesen wieder auf Länge 1, usw...