Prüfungsprotokoll Praktische Mathematik

Prof. Rumpf

17.07.2008

1 Einleitung

Prüfer Prof. Dr. Martin Rumpf
Thema Einf. in die Numerische Mathematik und Numerische Mathematik
Beisitzer unbekannt
Dauer ca. 30 min
Note 1.0

2 Verlauf

Zu Beginn meiner Prüfung durfte ich mir ein Thema auswählen. Da ich mir sicher war, dass ich nicht um das Lieblingsthema von Prof. Rumpf, dem Poissonproblem, herumkommen würde, begann ich mit diesem.

2.1 Poissonproblem

Zuerst stellte ich das kontinuierliche Problem da. Erzählte dann etwas zur Diskretisierung eines Würfelgebiets und dem Laplaceoperator (Diskretisierung 2. Ordnung) sowie desselben auf allgemeinen Gebieten, dem Shortley-Weller-Verfahren (Diskretisierung 1. Ordnung), im Eindimensionalen. Dazu malte ich Bilder auf.

Konsistenz? $||\Delta_h R_h u - R_h \Delta u|| < Ch^2$ von 2. Ordnung

Stabilität? $|||L_h^{-1}|||_\infty < C < \infty$

Was folgt daraus? Aus Konsistenz von p-ter Ordnung und Stabilität folgt Konvergenz p-ter Ordnung.

Wie geht man den Beweis an? Betrachte nicht $R_h u - u_h$, sondern $\Delta_h R_h u - \Delta_h u_h$. Zusammen mit Stabilität folgt dann Konvergenz 2. Ordnung.

Nun folgt ein kleiner Ausflug, der etwas über den Vorlesungsstoff hinausgeht. *Wie würde man ein Verfahren mit Konvergenz 4. Ordnung bekommen?* Man benötigt Konsistenz 4. Ordnung. *Wie erreicht man das?* Hmm … *Das wurde mal in einer Übungsaufgabe (Aufgabe 29) behandelt. … Ist aber nicht schlimm, wenn Sie sich nicht daran erinnern können. Man verwendet mehr Punkte zur Diskretisierung des Laplace: u(x-2h), u(x-h), u(x), u(x+h), u(x+2h). Können da irgendwelche Probleme auftreten?* Ja, am Rand sind nicht alle Punkte verfügbar.

Wo tritt das noch auf, dass man am Rand Schrott hat? Bei der Diskretisierung allgemeiner Gebiete. *Wir können am Rand also nur Konsistenz von 2. Ordnung erhalten. Können Sie sich vorstellen, dass man trotzdem Konvergenz 4. Ordnung erhält?* Nein, zumindest kann man das nicht aus dem Konvergenzsatz folgern. *Was für eine besondere Struktur hat dieses Problem aber? ... Das kontinuierliche Problem hat es ebenso.* Es dauerte ein wenig, bis ich wusste, worauf er hinauswollte: Das Maximumsprinzip. *Damit kann man schließlich 4. Ordnung Konvergenz erhalten.*

Wie würde man nun die Wärmeleitungsgleichung behandeln? Bei gegebener Ortsdiskretisierung erhält man: $\dot{u}_h - \Delta_h u_h = 0, u_h(0) = u_h^0 \Rightarrow u_h = e^{t\Delta_h} u_h^0$. Lösen würde man dies zum Beispiel mit dem Eulerverfahren. Dies könnte jedoch ein steifes Problem sein, da die Eigenwerte von $-L_h$ kleiner Null und nach unten unbeschränkt sind. *Was gäbe es für einen Ausweg?* Implizite Verfahren. Als einfachstes Beispiel könnte man das implizite Eulerverfahren verwenden. *Wir wollen ja die Exponentialfunktion approximieren.* Erhalten $\frac{1}{1-t}$.

Was liefert uns das Lemma von Gerschgorin für die Matrix L_h des Poissonproblems auf Würfelgebieten? Invertierbarkeit, da nach dem zweiten Teil Null kein Eigenwert sein kann, weil die Matrix irreduzibel ist und so alle Ränder in den Schnitt einnbezogen werden, auch die mit Radius kleiner 2 (1D) bzw. 4 (2D).

2.2 Gauss-Quadratur

Wie wählt man die Knoten bei der Gauss-Quadratur? Als Nullstellen des orthogonalen Polynoms.

Wieviele Freiheitsgrade hat man? n+1 durch die Wahl der Knoten und n+1 durch die Wahl der Gewichte, also 2n+2. *Welcher Polynomraum hat 2n+2 Freiheitsgrade?* $\mathcal{P}_{2n+1}$

Wählt man nun die Knoten als NST.n des orthogonalen Polynoms und die Gewichte wie in der Vorlesung, wie beweist man knapp, dass diese Quadraturformel $\hat{I}$ exakt auf $\mathcal{P}_{2n+1}$ ist? Sei $p \in \mathcal{P}_{2n+1}$. Polynomdivision: $p = q \cdot P_{n+1} + r$, wobei $P_{n+1} = (t - t_0) \cdot \ldots \cdot (t - t_n)$. Benutze $P_{n+1} \perp_\omega \mathcal{P}_n$ und $\hat{I}$ exakt auf $\mathcal{P}_n$ wegen Knotenwahl.

2.3 Splines

Wie würde man einen Looping durch festgelegte Punkte bauen, damit er möglichst angenehm für die Fahrgäste ist? Mit kubischen Splines, da diese minimale Krümmung unter Interpolierenden haben. Sie minimieren das Funktional bzw. die Energie $E[c] = \frac{1}{2}\int_a^b ||\ddot{c}(t)||^2 dt$. *Was entspricht $\ddot{c}$ physikalisch?* Der Beschleunigung. Da diese bei kubischen Splines stetig ist, gibt es kein Ruckeln.

Wie beweist man knapp, dass ein kubischer Spline s das Funktional E minimiert? $\ddot{c} = \ddot{c} - \ddot{s} + \ddot{s}$, verwende binomische Formel und teile Integrale auf $E[c] = I_1 + I_2 + I_3$. $I_1 = E[s]$, $I_2 \geq 0$, $I_3 = 0$ unter der Voraussetzung, dass $\ddot{s}(\dot{c} - \dot{s})|_a^b = 0$ (dies deckt die vernünftigen Randbedingungen ab).

3 Zusammenfassung

Die Atmosphäre bei dieser Prüfung war sehr angenehm. Bevor wir begannen, wurde mir ein Kaffee/Orangensaft angeboten und auch im Verlauf wirkte es mehr wie ein Gespräch als eine ernste Prüfung. Wenn man die Antwort auf eine Frage nicht sofort hatte, erhielt man schnell Hilfestellung und es wurde einem nicht übel genommen, wenn man sich nicht an alles erinnern konnte. Insbesondere wenn man zu Sachen gefragt wird, die nicht in der Vorlesung behandelt wurden, darf man sich nicht verunsichern lassen. Dass ich nicht wusste, worauf er hinauswollte, hat der Note nicht geschadet. Sehr gut fand ich, dass meine starke Unsicherheit bei ein paar Kleinigkeiten, als normale Aufregung wargenommen wurden. Ich wünsche euch allen viel Erfolg bei eurer Prüfung. Bei Herrn Rumpf als Prüfer sollte man sich keine Sorgen machen.