Geprüfte Themen: Iterative Löser, Banachscher Fixpunktsatz, Anfangswertproblem mit Eulerverfahren, Newtonverfahren, Satz von Newton-Kantorovich (wichtig!), Gauß-Christoffel Quadratur, FEM (Lemma von Céa!)
Überhaupt nicht erwähnt wurden Stabilität, Kondition, Aufwand, Direkte Löser, Gradienten- und cg-Verfahren, Polynominterpolation, Splines, Newton-Cotes Quadratur, Fouriertransformation (nur Schwarzraum), Finite Differenzen.
Das heißt aber nicht, dass diese Gebiete nicht wichtig wären. In der Regel wird wohl fast jedes Thema zumindest oberflächlich angeschnitten.

Beisitzer: Fackelday

Note: 1,0

Vorbereitung: Ich habe drei Wochen vor der Prüfung angefangen zu lernen, die Inhalte von Prama II waren durch die zeitnahe Klausur noch recht frisch. Ich habe mich etwas zu lange mit Grundlagen wie Stabilität, Kondition etc. aufgehalten, die überhaupt nicht prüfungsrelevant waren. Man sollte sich meiner Meinung nach gleich zu Anfang mittels der Protokolle einen Überblick verschaffen über die Bereiche, die dem Prüfer als wichtig erscheinen.
Ich habe den Großteil aus der Vorlesung gelernt, mit der man ganz gut auskommt. Eine gute Mitschrift lohnt sich also. Die Bereiche, die er von Deuflhard (etwa Fixpunktverfahren, Newtonverfahren) und von Braess (cg-Verfahren, FEM) übernommen hat, habe ich hauptsächlich aus den Büchern gelernt. Den Stoer habe ich überhaupt nicht gebraucht.

(Die Fragen sind nicht ganz wortgetreu zitiert, geben aber in etwa den Prüfungsverlauf wieder)

Einstiegsthema: Iterative Löser

Dann erzählen Sie mal!
Ich habe das zu lösende Problem mit Motivation aufgeschrieben, sowie die allgemeine Fixpunktgleichung. Dann als Beispiel das Richardson-Verfahren erläutert (Wahl von Q = Id) und das allgemein hinreichende Konvergenzkriterium Roh(G) < 1 genannt.

Wie hängt das mit der Matrixnorm zusammen?
Norm von G >= Roh(G), ist leicht zu zeigen

Ja? Wenn das so leicht zu zeigen ist, dann machen Sie das mal.
Beweis hingeschrieben.
(Das war es dann schon zu meinem „Spezialthema“, habe weder andere Verfahren noch weitere Konvergenzkriterien nennen brauchen).

Woher kennen Sie denn Fixpunktiterationen noch?
Banachscher Fixpunktsatz. Satz hinschreiben und Lipschitzstetigkeit sowie Kontraktion erklären.

Banachscher Fixpunktsatz

Gilt der Satz auch auf Teilmengen des Banachraumes?
Ja, auf kompakten Teilmengen.

Ist jede abgeschlossene Menge beschränkt? – Nein (R^n).

Ist jede beschränkte Menge abgeschlossen? – Nein (offene Einheitskugel).

Wie ist Kompaktheit definiert?
Heine-Borel Eigenschaft, äquivalent zu abgeschlossen und beschränkt im R^n

Wie ist das im unendlich-dimensionalen?
Das haben wir nie richtig behandelt, daher kann ich das nicht wirklich wissen.

<u>Eulerverfahren</u>
Schreiben Sie mal die Variationsformulierung hin.
Habe aus versehen das Anfangswertproblem (AWP) hingeschrieben und wollte mich gerade korrigieren.

Ist recht! Dann machen Sie mal damit weiter.
Allgemeines Problem y'(x)=F(x,y(x)) und y(0)=a; dazu das konkrete in der Vorlesung behandelte Beispiel y'(x)=c*y(x)
Habe dazu gesagt, dass hier eine PDE vorliegt.

Ist das wirklich eine PDE?
Na ja, jede ODE ist natürlich auch eine PDE. An sich liegt hier eine gewöhnliche Differenzialgleichung vor.

Wann existiert dazu eine Lösung?
Nach dem Satz von Picard-Lindelöff existiert lokal eine Lösung bei gegebener Lipschitz-Stetigkeit.

Wie beweist man den Satz?
Über den Banachschen Fixpunktsatz, indem man eine kontrahierende Selbstabbildung bastelt.

Wie löst man jetzt das Problem?
Über das explizite oder implizite Eulerverfahren. Ich habe beide hingeschrieben und über die Taylorentwicklung hergeleitet. Dazu habe ich ein Bild gemalt zum Beispiel von y'(x)=c*y(x) (man interpoliert ja quasi die Funktion aus der DGL).

Welches der beiden Verfahren ist besser?
Der implizite Euler ist stabil, man kann t recht groß wählen.

Woher kennen Sie diese Methodik bereits?
Vorwärt- und Rückwärtsrekursion, Miller-Algorithmus

Was sind das für Funktionen?
Beim Expliziten: y(k*t)=y(0)*(1-c*t)^k ist ein Polynom.
Beim Impliziten: y(k*t)=y(0)/(1+c*t)^k ist eine gebrochen rationale Funktion.

Wie löse ich denn jetzt den impliziten Euler, wenn ich nicht das Beispiel betrachte, sondern ganz allgemein das nicht-lineare Problem $y'(x)=F(x,y(x))$?
Bei Nicht-Linearitäten ist das Newtonverfahren immer gut.

Newtonverfahren
Erzählen Sie doch mal was zu Newton.
Zu lösen ist $F(x)=0$, Iteration lautet $x^{k+1} = x^k - [F'(x^k)]^{-1} * F(x^k)$.

Konvergiert das Verfahren?
Kann man nicht allgemein sagen. Das Newtonverfahren kann entweder divergieren, konvergieren oder stationär bleiben (Endlosschleife). Man kann aber lokal quadratische Konvergenz erreichen.

Woraus folgt das?
Zum Beispiel aus dem Satz von Newton-Kantorovich.

Wie sieht denn die Beweisidee aus?
Soll ich dazu auch den Satz und die affin-invariante Lipschitzbedingung aufschreiben?

Nö, das kenn ich ja. Schreiben Sie das nur, wenn Sie das im Beweis brauchen.
Brauch ich, denn es sind ja schließlich die Voraussetzungen, die ich im Beweis brauche. Also habe ich alles aufgeschrieben.
Den Beweis habe ich etwas anders geführt, als er in der Vorlesung. Das hat er erst nicht begriffen und wollte mir erzählen, was ich gerade gefolgert hätte, wäre ja meine Annahme gewesen. Stimmte aber nicht. Hab es ihm dann noch mal erklärt und weiter gemacht (an der Stelle war es wichtig, dass ich mich nicht habe verunsichern lassen).

Wo folgt denn da jetzt die quadratische Konvergenz?
Hab den Beweis also bis dahin vollständig aufgeschrieben. Die Eindeutigkeit hat er nicht mehr gefragt.

Gauß-Christoffel Quadratur
Wir sind jetzt bei der Gauß-Christoffel Quadratur. Nennen Sie zur Konstruktion der Orthogonalpolynome zwei verschiedene Gewichte.
$W=1$ bei Gauß-Legendre und $w=(1-x^2)^{(-1/2)}$ bei Tschebyscheff.

Jetzt sollen aber nicht nur die Nullstellen der Polynome die Stützstellen sein, sondern auch die Intervallgrenzen a und b. Wie ist nun w zu wählen?
$W=(x-a)*(x-b)$ (=Gauß-Lobatto).

FEM (Finite Elemente)
Schreiben Sie mal das Lemma von Céa hin.
Hingeschrieben mit allen Voraussetzungen.

Bezüglich welcher Norm minimiert also die diskrete Lösung u_h das Problem?
Vielleicht bezüglich der H-Norm, so wie sie im Satz steht?

Hm. Was passiert denn mit der Konstante GAMMA/gamma vor dem Infimum, wenn man statt der H-Norm die a-Norm nimmt (also bzgl. der Bilinearform)?

Da muss man mal im Beweis nachschauen…

Gut, dann beweisen Sie mal das Lemma, aber bezüglich der a-Norm.
Hab ich dann mit etwas Hilfestellung gemacht, unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung kommt dann die Konstante 1 raus. Das heißt also, dass die diskrete Lösung u_h die Orthogonalprojektion von u auf den diskreten Unterraum bezüglich der a-Norm ist (und somit die gewünschte Bestapproximation).

Zusatzfragen
An Fackelday: Max, hast du noch Fragen? – Fackelday: Nö.

Ok, wie ist denn der Ho°1 definiert (Sobolevraum)?
Hingeschrieben, schwache Ableitung kurz erklärt, darüber die Norm begründet, die Notwendigkeit des Spuroperators erläutert (L^2 Funktionen sind Funktionenklassen und können auf Nullmengen wie dem Rand alles machen, daher ist eine Nullrandbedingung nicht brauchbar).

Jetzt noch mal kurz zum Schwarzraum: Da habe ich in der Vorlesung eine Halbnorm eingeführt. Wie sah die denn aus?
Ich wusste nicht, welche Halbnorm wir denn da eingeführt haben und hab darum erstmal den Schwarzraum hingeschrieben. Dabei steht ja hinten als Anforderung an die Funktionen, dass supsup(1+x²)^m*del^alpha phi < unendlich (so ähnlich, nicht ganz exakt). Das wollte er sehen.

TIPPS:
Generell sollte man es natürlich in Prüfungen niemals zeigen, wenn man Fragen bereits kennt. Es schadet nicht, ruhig mal ein bisschen zu überlegen. Sonst kann der Prüfer sofort erkennen, was man schon erwartet hat und was nicht. Dann wird er natürlich versuchen, neue Fragen zu stellen.
Auch, wenn man eine Frage nicht ganz versteht, sollte man ruhig bleiben und erstmal etwas hinschreiben, was in die Richtung der Frage geht. Dann kann der Prüfer daran anknüpfen und sagen, ob man auf dem Holzweg ist oder was man noch ergänzen muss. Herr Krause hat es auch ganz gut geschafft, mich immer auf die richtige Fährte zu bringen, obwohl ich manchmal nicht wusste, worauf er hinauswollte (so etwa bei Gauß-Lobatto und dem Lemma von Céa). Aber wenn man es dann selbst schafft, sich das herzuleiten, ist das schon ein gutes Gefühl.
Man sollte auch lieber etwas zu viel als zuwenig aufschreiben, selbst wenn Herr Krause nicht darauf besteht. Zum einen gibt es Sicherheit, wenn schon etwas auf dem Papier steht, zum anderen kann man später noch mal auf bereits Niedergeschriebenes verweisen, falls man später in der Prüfung darauf zurück kommt (bei mir Banachscher Fixpunktsatz).
Und um noch mal zu erwähnen, was in jedem Protokoll von Herrn Krause steht: Auf keinen Fall von ihm verunsichern lassen, besonders, wenn man Recht hat. Denn es kommt öfters mal vor, dass der Prüfer eine Kleinigkeit übersieht.
Herr Krause springt oft übergangslos zwischen den Themen, worauf man vorbereitet sein sollte.
Am Ende hat er wohl nur noch ganz spezielle Fragen gestellt, um zu entscheiden, welche Nachkommastelle genau er vergeben möchte. Gerade am Anfang der Prüfung gehen die Fragen wenig in die Tiefe.
Ich wünsche allen weiteren Prüflingen viel Erfolg und hoffe, mit diesem Protokoll ein wenig weitergeholfen zu haben.