Algebra 1

Prof. Dr. Jan Schröer
http://www.math.uni-bonn.de/people/schroer/

Sommersemester 2009 - Rheinische Friedrich-Wilhelm Universität
Bonn, Deutschland

Contents

Chapter 1

Einführung

1.1 Voraussetzungen

Grundlagen Gruppen- und Ringtheorie: Normalteiler, auflösbare Gruppen, Ringe: Teilbarkeitstheorie, Teilbarkeitstheorie, Sylov-Stäze, Gruppenaktionen, irreduzible Elemente, Primelemente, faktorielle Ringe, faktorielle Ringe, Ideale, Faktorringe

1.2 Inhalte und Motivation

Von je her war das Lösen von Gleichungen eine der Ziele der Mathematik.

- Lineare Gleichungssystem sind Systeme von Gleichungen der Form

  $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i$$

  mit $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq m \in \mathbb{N}$ und $a_{ij}, b_i \in K$ Körper. Die Theorie zu diesen Gleichungen wird in der Linearen Algebra thematisiert. Dazu werden (aber nicht notwendigerweise) abstrakte Konzepte wie Vektorräume und lineare Abbildungen eingeführt.

- Weiterhin interessiert man sich für die Nullstellen von Polynomen in einer Variablen. Also find X, so dass $f(X) = 0$ für $f \in K[X]$. Ein Beispiel für so ein Polynom ist: $X^5 - 4X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Die Antworten dazu liefert die galois-Theorie und die Theorie der Körpererweiterungen.

- Differentialgleichungen können mit Werkzeugen der Analysis angegangen werden

- Polynomiale Gleichungen in n Variablen $f_1, \ldots, f_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$ finde $x \in K^n$, sodass $f_i(x) = 0 \quad \forall i$. Diese Gleichungssystem behandelt man in der algebraischen Geomerie.

1.3 Konvention

Im folgenden ist K immer ein Körper und $K[X]$ der Polynomring in <u>einer</u> Variablen und $K[X_1, \ldots, X_n]$ für den Polynomring in mehreren Variablen. Weiterhin bezeichne $A \subseteq B$ die Teilmengenbeziehung und $A \subset B$ die echte Teilmengenbeziehung.

Chapter 2

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

2.1 Was heißt "‘Konstruktion mit Zirkel und Lineal"’?

$\mathcal{E}$:= Zeichenebene. Sei $M \subseteq \mathcal{E}$ nicht-leere Teilmenge, $G(M)$ die Menge aller Geraden, welche mindestens 2 Punkte aus M enthalten und $K(M)$ die Menge aller Kreise, deren Mittelpunkt in M liegen und deren Radien genau den Abständen jeweils zweier Punkte in M entsprechen.

M' ist die Menge aller Punkte in $\mathcal{E}$ welche man aus M durch einmalige Anwendung einer der folgenden Operationen erhält:

a) Schnitt zweier Gerade aus $G(M)$

b) Schnitt einer Geraden aus $G(M)$mit einem Kreis aus $K(M)$

c) Schnitt zweier Kreise aus $K(M)$

Definiere induktiv $M_0 := M$ für $n \geq 0$. Sei M_n schon definiert, dann setze $M_{n+1} := M_n'$. Damit erhalten wir

$$M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$$

und definieren

$$\hat{M} = \bigcup_{n \geq 0} M_n$$

die "Menge aller aus M mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte".

Bemerkung 2.1.1. *a) Sei $P \in \hat{M}$ also $\exists n \in \mathbb{N} : P \in M_n$ und man erhält P aus Mdurch endlich viele Anwendungen der Operationen.*

b) Es gilt $(\hat{M})' = \hat{M}$. Bei der Konstruktion von $P \in (\hat{M})'$ verwenden wir nur endlich viele Punkte aus $\hat{M}$. Diese liegen für ein genügend großes $n \in \mathbb{N}$ in einem M_n. Also $P \in M_{n+1} \subseteq \hat{M}$.

2.2 Klassische Konstruktionsprobleme

Delische Problem der Würfeldopplung Zu einem gegebenen Würfel soll einWürfel mit doppeltem Volumen konstruiert werden. Gegeben $M = \{P_1, P_2\} \subset \mathcal{E}$. Frage: $\bar{P_1 P_2}\sqrt[3]{2} \in \hat{M}$.

Dreiteilung des Winkels Zu einem Winkel mit Öffnung ϕ soll ein Winkel mit Öffnung $\frac{\phi}{3}$ konstruiert werden. Gegeben $M = \{P_1, P_2, P_3\}$

Quadratur des Kreises

Konstruktion von regulären n-Ecken Sei $n \geq 2$ und $M = \{P_1, P_2\}$ für welche n lässt sich ein Q finden. Die "'alten Griechen"': $n = 2, 3, 5$ und der 18-jährige Gauß: $n = 17$.

2.3 Algebraisierung des Konstruktionsproblems

Im folgenden ist die Zeichenebene $\mathcal{E}$ wechselweise $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{C}$. Eine Teilmenge $M \in \mathbb{C}$ heißt "'Zirkel-und-Lineal-Anfangsmenge"' (ZLAM) falls gilt, dass $0, 1 \in M$.

Satz 2.3.1. *Sei M eine ZLAM, dann ist $\hat{M}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $\forall z_1, z_2 \in \hat{M}$ gilt, dass $z_1+z_2, z_1-z_2, z_1\cdot z_2 \in \hat{M}$ und für $z_2 \neq 0$ gilt, dass $\frac{z_1}{z_2} \in \hat{M}$. Die Summe läßt sich durch schlagen eines Kreises mit Radius $|z_1|$ um z_2 und eines Kreises mit Radius $|z_2|$ um z_2 nachweisen. Um zu zeigen, dass für $z_2 \in \hat{M}$ auch $-z_2 \in \hat{M}$ betrachtet man die Gerade durch z_2 und die 0, schläge um 0 einen Kreis mit Radius z_2 und betracchtet den zweiten Schnittpunkt davon. Dann ist $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \in \hat{M}$. Gegeben $r_1, r_2 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ in $\hat{M}$ zunächst zeigen wir, dass $r_1 \cdot r_2 \in \hat{M}$. Sei $g \in G(\hat{M}), z \in \hat{M}$ mit $z \in g$. Daraus lässt sich eine Senkrechte zu g durch z konstruieren. Der Strahlensatz liefert, dass das Produkt enthalten ist: $\frac{x}{r_1} = \frac{r_2}{1}$. Sei nun $z_1, z_2 \in \hat{M}$ und $z_j = r_j(\cos(\phi_j) + i\sin(\phi_j)) = r_j e^{i\phi_j}$ für $j \in \{1, 2\}$. Nun ist bekannt, dass $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$. Dazu schlagen wir r_j auf die reele Achse nieder und haben mit vorhergehender Überlegung gezeigt, dass $r_1 \cdot r_2 \in \hat{M}$. Letzendlich gibt es für $z_2 \neq 0$ die Darstellung $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2}(\cos(-\phi_2) + i\sin(-\phi_2))$. Wieder mit Strahlensätzen zeigt man, dass $r_2^{-1} \in \hat{M}$. □

Bemerkung 2.3.1. *Angenommen $z \in L = K_0(w_1, \ldots, w_n) \subseteq \hat{M}$ ($M \subseteq \mathbb{C}, 0, 1 \in M, K_0 = \mathbb{Q}(M \cup \bar{M}), w_1^2 \in K_0, w_{i+1}^2 \in K_0(w_q, \ldots, w_i)$). Dann: $\exists z_1, \ldots, z_m \in M \cup \bar{M}$ und Gleichungen*

$$\begin{aligned} w_i^2 &= \frac{f_i(z_1, \ldots, z_m, w_1, \ldots, w_{i-1}}{g_i(z_1, \ldots, z_m, w_1, \ldots, w_{i-1}} \\ & \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ z &= \frac{f(z_1, \ldots, z_m, w_1, \ldots, w_n)}{g(z_1, \ldots, z, w_1, \ldots, w_n)} \end{aligned}$$

wobei f, g, f_i, g_i Polynome über $\mathbb{Q}$ sind. Kennt mman diese Gleichungen, so liefern sie ein explizietes Konstruktionsverfahren für z (mit Zirke und Lineal).

Definition 2.3.2. *Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ Teilkörper.*

$$\sqrt{K} := \{\sqrt{z} \mid z \in K\}$$

Definition 2.3.3.

$$K_{n+1} := K_n(\sqrt{K_n}) \quad n \geq 0$$

Corrolar 2.3.4. *Sei $K_0 = \mathbb{Q}(M \cup \bar{M})$*

a) $\hat{M} = \bigcup_{n\geq 0} K_n$

b) $\hat{M} = \bigcap_{K_0 \leq L \leq \mathbb{C} \text{ und } L \text{ ist quadratisch abgeschlossen}} L$

Beweis:

a) Sei $\hat{M}$ quadratisch abgeschlossen und $K_0 \subset M$ dann gilt $\bigcup_{n\geq 0} K_n \subseteq \hat{M}$. Umgekehrt: Sei $z \in \hat{M}$ und

$$z = \frac{f(z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_n)}{g(z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_n}$$

wie oben. Dann ist $z \in K_n \Rightarrow$ "*enth*".

TODO: umgekehrteenahlten

b) Sei $K_0 \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$ mit L quadratisch abgeschlossen, dann gilt $K_n \subseteq L$ $\forall n$ und somit $\hat{M} \subseteq L$ und mit 1 folgt dann $\hat{M} \subseteq L$. Also $K_0 \subseteq \hat{M} \subseteq \mathbb{C}$ also "enth".

TODO: enthalte

□ Sei $M \subseteq \mathbb{C}, 0, 1 \in M$ und $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

$$\tilde{M} := \text{"Koordinaten der Punkte aus } M\text{"}$$

Es gilt $z \in \hat{M} \Leftrightarrow$ "Man erhält a und b aus den Elementen von $\tilde{M}$ durch wiederholtes Anwenden von $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und $\sqrt{\cdot}$"

Beispiel 2.3.5. *$M = \{0, 1\}$ hier lassen sich "Quadratur des Kreises" und "Würfeldopplung" formulieren.*

Beispiel 2.3.6. *Konstruktion des regulären 5-Ecks. $M = \{0, 1\}, z := z_5 = e^{frac2\pi i5}$. Ist nun $z \in \hat{M}$?*

$$\begin{aligned} 0 &= z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0 \\ \Rightarrow \quad 0 &= z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \\ \Rightarrow \quad 0 &= z^2 + z(z^3 + z^2 + 1) + 1 \end{aligned}$$

$$(z + z^{-1})^2 = z^2 + z^{-2} + 2 = z^2 + z^3 + 2 = -(z + z^{-1}) + 1$$

??

$$\Rightarrow (z + z^{-1})^2 + (z + z^{-1}) - 1 = 0$$

mit $X = (z + z^{-1})$ ist also $X^2 + X - 1 = 0$ und somit

$$z + z^{-1} = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

und dann

$$z^2 + z^3 + 1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

Nun folgt mit **??**

$$z^2 + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})z + 1 = 0$$

$$z = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}$$

Dies ist ein explizite Konstruktionsvorschrift des regelmäßigen 5-Ecks.

2.4 Lösungsformeln für Polynome

Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ dann ist f nach dem Fundamentalsatz der Algebra Darstellbar als $f = \prod_{i=0}^{n}(X - C_i)$ wobei $c_i \in \mathbb{C}$.

Problem: Kann man die Nullstellen c_i durch die Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ "ausdrücken"?

Beispiel 2.4.1. *a) Für $n = 2$ ist die "p-q-Formel" eine Lösung des Problems.*

b) $a_3 \neq 0$ sei das Polynom

$$a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = 0$$

gegeben, substituiere $X \mapsto X - \frac{a_3}{3}$ und erhalte

$$X^3 + pX + q = 0$$

Diese Gleichung hat

$$D := -(4p^3 + 27q^2)$$

als Diskriminante

$$\begin{array}{rcl} A & := & \sqrt[3]{-\frac{27}{2}q + \frac{3}{2}\sqrt{-3D}} \\ A & := & \sqrt[3]{-\frac{27}{2}q - \frac{3}{2}\sqrt{-3D}} \end{array}$$

So gewählt, dass $A \cdot B = -3p$ und $z_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$. Damit ergeben sich folgende 3 Lösungen

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{3}(A + B) \\ x_2 & = & \frac{1}{3}(z_3^2 A + z_3 B) \\ x_3 & = & \frac{1}{3}(z_3 A + z_3^2 B) \end{array}$$

c) Für $n = 4$ verläuft ähnlich.

Definition 2.4.2. *Sei $K \subseteq L$ Körpererweiterung, dann ist L eine Radikalerweiterung von K, falls gilt:*

a) $\exists w_1, \dots, w_n \in L$ mit $L = K(w_1, \dots, w_n)$

b) $\exists r_1, \dots, r_n \geq 2$ mit $w_1^{r_1} \in K$, $w_{i+1}^{r_{i+1}} \in K(w_1, \dots, w_i) \quad \forall i$

Man sagt dann "L entsteht aus K durch sukzessive Adjunktion von Wurzeln".

Definition 2.4.3. *Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ ein Polynom. Die Gleichung $f = 0$ ist "(über K) durch Radikale auflösbar" falls $\exists K \subseteq L$ Radikalerweiterung mit: f hat eine Nullstelle in L.*

Bemerkung 2.4.4. *Jedes Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad ≤ 4 ist (über $\mathbb{Q}$) durch Radikale auflösbar.*

2.5 Körpererweiterungen

Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung.

Notation 2.5.1. *Schreibweise:* L/K

Bemerkung 2.5.1. *L ist ein K-Vektorraum.*

Definition 2.5.2. *$x \in L$ heißt algebraisch über K falls $\exists f \in K[X] - \{0\}$ mit $f(x) = 0$ sonst heißt x transzendent über K.*

Beispiel 2.5.3. *$L = \mathbb{C}, K = \mathbb{Q}$ liefern uns "algebraische Zahlen" und "transzendente Zahlen".*

Bemerkung 2.5.4. *Die Menge aller algebraischer Zahlen ist abzählbar.*

Beweis: $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar und steht in eins-zu-eins-Relation der Polynome vom Grad $\leq n - 1$. □

Definition 2.5.5. *Sei $x \in L$ algebraisch über K. Das Minimalpolynom von x über K (Schreibweise: $m_x^{L/K} = m_x(X)$) ist das normierte Polynom vom kleinsten Grad, welches x als Nullstelle hat. $[x : K] := \deg m_x^{L/K}$. Wenn $x \in L$ transzendent über K ist, so ist $m_x^{L/K} := 0$ un $[x : K] := \infty$.*

Beispiel 2.5.6. *a)* $[x : K] = 1 \Leftrightarrow x \in K$

b) $[\sqrt[3]{2} : \mathbb{Q}] = 3$ *(mit Eisensteinkriterium) und* $m_{\sqrt[3]{2}} 2^{\mathbb{C}/\mathbb{Q}}$.

Definition 2.5.7. *Sei L/K Körpererweiterung. Die Dimension des K-Vektorraums L heißt Grad von L/K. Schreibweise: $[L : K]$.*

Definition 2.5.8. *L ist algebraisch über K falls alle $x \in L$ algebraisch über K sind. "L/K ist eine algebraische Körpererweiterung". Andernfalls ist L eine transzendente Körpererweiterung.*

Bemerkung 2.5.9. *$\mathbb{R}/\mathbb{Q}, \mathbb{C}/\mathbb{Q}$ sind transzendente Körpererweiterungen und $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ ist eine algebraische Körpererweiterung, denn $z = a + ib$ ist Nullstelle von $X^2 - 2aX + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[X]$.*

Wissen:

- $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} : \mathbb{Q}] = 3 \neq 2^l \; \forall l$ also ist die Würfeldopplung mit Zirkel und Lineal unmöglich. ($z \in \hat{M} \Rightarrow [K_0(z) : K_0] = 2^l, K_0 = \mathbb{Q}[M \cup \hat{M}]$)
- (Lendemann 1882) $\pi \in \mathbb{C}$ ist transzendent über $\mathbb{Q}$.
  $\sqrt{\pi}$ ist transzendent. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\pi) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$ und $[\mathbb{Q}[\pi] : \mathbb{Q}] = \infty$ und wegen der Gradformel ist dann $[\mathbb{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbb{Q}] = \infty \neq 2^l \; \forall l$ und die Quadratur des Kreises ist nicht möglich.
- Dreiteilung des Winkels: $M = \{0, 1, e^{i\phi}\}$. Frage: $z = e^{\frac{i\phi}{3}} \in \hat{M}$? Was ist also$[K_0(e^{\frac{i\phi}{3}} : K_0)$? Sei $K_0 = \mathbb{Q}(^{i\phi})$ und $f := X^3 - e^{i\phi} \in K_0[X]$ und $e^{\frac{i\phi}{3}}$ ist Nullstelle von f. Ist f irreduzibel über K_0? Mögliche Fälle:

$$[K_0(e^{\frac{i\phi}{3}}) : K_0] = \begin{cases} 1 & \text{für } z \in \hat{M} \\ 2 & \text{für } z \in \hat{M} \\ 3 & \text{für } z \notin \hat{M} \end{cases}$$

Bemerkung 2.5.10. *Allgemein gilt nicht, dass aus $0, 1 \in M \subseteq \mathbb{C}$ mit $[K_0(z) : K_0] = 2^l$ sofort $z \in \hat{M}$ gilt.*

2.6 Algebraische Körpererweiterungen

Definition 2.6.1. *Sei $^L/_K$ Körpererweiterung und $a_1, \dots, a_n \in L$. Dann ist $\underline{K[a_1, \dots, a_n]}$ der von $\{a_1, \dots, a_n\}$ erzeugte Unterring von L über K.*

Bemerkung 2.6.2. *Sei $K[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring in n Variablen. Sei $\eta : K[X_1, \dots, X_n] \to L$ der Ringhomomorphismus, welcher durch $X_i \mapsto a_i$ definiert ist. Nun ist aber $K[a_1, \dots, a_n) := \mathrm{im}(\eta)$ welches im Allgemeinen nicht gleich $K(a_1, \dots, a_n) = \bigcap_{U\,\text{Unterkörper, mit}\, a_i \in U}$*

Definition 2.6.3. *Eine Körpererweiterung $^L/_K$ heißt endlich erzeugt, falls*

$$\exists a_1, \dots, a_n \in L : L = K(a_1, \dots, a_n)$$

Bemerkung 2.6.4. *Sei $^L/_K$ Körpererweiterung und $M \subseteq L$ eine Teilmenge. Dann heißt*

$$K(M) = \bigcup M' \subseteq M \text{endl. Teilmenge} K(M')$$

der von M erzeugte Zwischenkörper von $^L/_K$.

Satz 2.6.1. *Sei $^L/_K$ Körpererweiterung und $a \in L$ algebraisch über K. Sei $\phi : K[X] \to L$ der Einsetzungs-Ringhomomorphismus. Dann gilt $\mathrm{im}(\phi) = K[a] = K(a) \cong {}^{K[X]}/_{(f)}$ wobei $f = \min_a^{L/K}(X)$.*

Beweis: Homomorphisätze und $\ker(\phi) = (f)$ □

Bemerkung 2.6.5. *Sei $\deg(f) = n \geq 1$ dann ist $\{\bar{1}, \bar{X}, \bar{X}^2, \dots, X^{\bar{n}-1}\}$ eine K-Basis von ${}^{K[X]}/_{(f)}$.*

Bemerkung 2.6.6. *Sei $^L/_K$ Körpererweiterung und $a_1, \dots, a_n \in L$, dann gilt:*

$$K(a_1, \dots, a_n) = Q(K[a_1, \dots, a_n])$$

der Quotientenkörper von $K[a_1, \dots, a_n]$.

Satz 2.6.2. *Sei $^L/_K$ endlich erzeugte Körpererweiterung (also $L = K[a_1, \dots, a_n]$. Falls $a_1, \dots, a_n$ algebraisch über K, so gilt $L = K(a_1, \dots, a_n) = K[a_1, \dots, a_n]$.*

Beweis: Für $n = 1$ ist $K[a_1] = K(a_1)$ sei also $n > 1$. dann ist $K[a_1, \dots, a_n) = (K(a_1, \dots, a_{n-1}))(a_n)$ was nach Induktionsannahme $(K[a_1, \dots, a_{n-1}])(a_n) = (K[a_1, \dots, a_{n-1}])[a_n] = K[a_1, \dots, a_n]$. □

Proposition 2.6.7. *Sei $M = \{a_i \mid i \in I$ und $L = K(M)$ d.h. M ist ein Erzeugendensystem von $^L/_K$ dann gilt:$^L/_K$ ist algebraisch also a_i algebraisch über K für alle $i \in I$.*

Satz 2.6.3. *(Transitivität algebraischer Körpererweiterungen). Sei $K \subseteq L \subseteq M$ Körpererweiterung. Annahme: $^L/_K$ algebarisch. Sei $\alpha in M$ algebraisch über L. Dann gilt: α ist algebraisch über K und insbesondere $^M/_K$ ist algebraisch genau dann, wenn $^M/_L$ und $^L/_K$ algebraisch sind.*

Beweis: Sei $f = X^n + c_1 X^{n-1} + \cdots + c_n \min_\alpha^{M/L}(X) \in L[X]$. Es gilt: α ist algebraisch über $K(c_1, \dots, c_n)$. Dann ist $[K(c_1, \dots, c_n, \alpha) : K(c_1, \dots, c_n)] < \infty$ und $[K(c_1, \dots, c_n) : K] < \infty$ (da $^L/_K$ algebraisch). Wegen der Gradformell ist dann $[K(c_1, \dots, c_n, \alpha) : K] < \infty$. Also ist $K(c_1, \dots, c_n, \alpha)$ algebraisch über Kund α ebenso. □

2.7 Algebraischer Abschluss von Körpern

Verfahren von Kronecker:

Satz 2.7.1. *Sei $f \in K[X]$ Polynom mit $\deg(f) \geq 1$. Dann existiert eine algebraische Körpererweiterung $K \subseteq L$ so dass f eine Nullstelle in L hat. Falls f irreduzibel über K so gilt $L = {}^{K[X]}/_{(f)}$.*

Bemerkung 2.7.1. *(f) ist maximales Ideal in $K[X]$, weil f irredzuibel ist folgt, dass ${}^{K[X]}/_{(f)}$.*

Beweis: o.B.d.A. sei f irreduzibel. $L := {}^{K[C]}/_{(f)}$ und betrachte

$$K \longrightarrow K[X] \xrightarrow{\pi} {}^{K[X]}/_{(f)} = L$$

$\eta \neq 0$ und η ist ein Körperhomomorphismus und damit injektiv. Identfiziere also K mit $\mathrm{im}(\eta)$. Also ist ${}^{L}/_{K}$ eine Körpererweiterung. $x := \pi(X) = \bar{X}$ und $f = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i = \sum_{i=0}^{n} c_i \pi(X)^i = \pi\left(\sum_{i=0}^{n} c_i X^i\right) = \pi(f) = \bar{f} = (f) = 0 \in {}^{K[X]}/_{(f)}$. Also hat f eine Nullstelle in L.

Sei $\deg(f) = n$. Dann ist $\{\bar{1}, \bar{X}, \bar{X}^2, \ldots, \bar{X}^{n-1}\}$ eine K-Basis von ${}^{K[X]}/_{(f)}$ damit ist $[L : K] = n < \infty$ und ${}^{L}/_{K}$ algebraisch. Man kann dies wiederholen. Gegeben $f \in K[X]$ irreduzibel.

$$K =: L \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots \subseteq L_t$$

wobei $L_1 := {}^{K[X]}/_{(f)}$ also sei $f' \in L_1[X]$ und $L_2 := {}^{L_1[X]}/_{(f')}$. Damit zerfällt f über L_t in Linearfaktoren:

$$f = \prod_{i=1}^{s} (X - c_i) \quad c_i \in L_t$$

□

Um den algebraischen Abschluss von K zu konstruieren sollte man dies Verfahren für alle Polynome $f \in K[X]$ "gleichzeitig" durchführen.

Definition 2.7.2. *Ein Körper K heißt algebraisch abgeschlossen falls jedes Polynom $f \in K[X]$ mit $\deg(f) \geq 1$ eine Nullstelle in K besitzt.*

Bemerkung 2.7.3. *Dies bedeutet, dass f über K in Linearfaktoren zerfällt.*

Lemma 2.7.4. *Sei K ein Körper, dann sind äquivalent*

a) K ist algebraisch abgeschlossen

b) Falls ${}^{L}/_{K}$ algebraische Körpererweiterung so gilt $L = K$

Beweis: $1 \Rightarrow 2$: Sei ${}^{L}/_{K}$ algebraisch, $a \in L$ und $f = \min_a^{L/K}(X)$ dann ist f linear und $a \in K$

$2 \Rightarrow 1$: Angenommen ${}^{L}/_{K}$ ist algebraisch, dann ist $K = L\ \forall L$. Sei $f \in K[X]$ mit $\deg(f) \geq 1$ und das Kroneckerverahren liefert K' mit $K \subseteq K'$ und $f$eine Nullstelle in K' hat. ${}^{K'}/_{K}$ ist algebraisch und somit ist $K' = K$. □

Satz 2.7.2. *Zu jedem Körper K gibt es eine Körpererweiterung ${}^{L}/_{K}$ mit L ist algebraisch abgeschlossen.*